NOT TO BE ISSUED
OUT OF THE LIBRARY.

00049934

THE
ASIATIC SOCIETY OF BOMBAY
Town Hall, Bombay.

Digitized with financial assistance from the
Government of Maharashtra
on 25 June, 2016

PRINCIPIA MATHESEOS VNIVERSALIS,

SEV

INTRODVCTIO
AD
GEOMETRIÆ METHODVM
RENATI DES CARTES,

Conſcripta ab

ER. BARTHOLINO, CASP. FIL.

Editio tertia, priore correctior.

49934



AMSTELODAMI,
Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.
Sumptibus Societatis.

00049934

Generis & virtutum Nobilitate Perilluſtri & Generoſo Heroï,

D. CHRISTIANO THOMÆ,

TOPARCHÆ IN STAVGARD,

Equiti Aurato, Sereniſſimæ Regiæ Majeſtatis Cancellario Magno, Regni Daniæ Senatori primario, Regiæ Academiæ Hafnienſis Conſervatori ſummo, Patrono incomparabili.

NOn minùs verè quam eleganter Cicero lib. 1. Tuſc. quæſt. *Magni*, inquit, *eſt ingenii revocare mentem à ſenſibus, & cogitationem à conſuetudine abducere*. Cùm enim mens noſtra, quam in nobis concluſam circumferimus, divina quædam particula habeatur, nihil ſanè illi gratius accidere poteſt, quàm, cùm contemplando à corporeis rebus laxatur, originique ſuæ quàm ſimillima redditur. Senſuum

quippe uſurâ non minus fruuntur bruta animantia, quàm homines, imò, quædam longè nobis præſtant; mente verò quia non gaudent, univerſam hanc mundi machinam, quaſi tabulam pictam aſpiciunt, nec cogitant quâ de causâ quóve modo tot varietates rerum ſint ordinatæ. Quicunque igitur hominum non cupiunt ſemetipſos privare bono, quo reliqua animantia excedunt, non temerè permittent ſeſe ſenſuum judicio ita mancipari, ut ea ſufficere putent, quæ manibus quaſi palpare poſſunt, ac pauca velint ſi non oculis omnium obvia, pauciora credant quæ ſenſus non approbant, & pauciſſima eligant, niſi ab experientia firmentur. Non equidem diffiteri poſſumus, hoc propoſitum utile eſſe atque neceſſarium, ut initio juvetur cogitatio noſtra & intel-

intellectus; unde factum eſt, quòd Geometræ figuras, Arithmetici numerorum characteres, aliique alia ſubſidia invenerint; Sed experimentis ejuſmodi vix acquieſcere debent magna ingenia, nec poteſt is, qui ſapientiæ famam affectat. Communis enim experientia docet, multa facilè mereri mentis aſſenſum, & eſſe veriſſima, etiamſi ſenſuum judicio pro veris non agnoſcantur: & vice versâ, ſenſus quædam approbare; quæ, quia falſa, ratio nullo modo admittere poteſt. Atque hæc licèt omnibus in confeſſo ſint, non deſunt tamen, qui nihil niſi Praxin amantes, Theoriam & ſpeculationes omnes odio proſequuntur, atque ut inutilia eliminant: quos pertinaciæ ſuæ ſerò nimis pœnitebit, cùm aliorum imperio ita ſubjecti eſſe coguntur, ut ne

in Praxi quidem ſolita obſtacula removere ſciant, nec unquam novi quicquam addiſcant, niſi quod vel caſus ipſis, vel aliorum humanitas ſuppeditaverit. At alii, quorum animus longiùs exſpatiatur, & demonſtrationes cauſasque inquirit, utilia multa inveniunt, quæ ab aliis ignorantur; adeoque in Praxi multa excogitantes compendia, allaborant ut tædia & impedimenta obvia tollantur; quorum tamen inventa non eſſent repudianda, etiamſi humani ingenii imbecillitas, aut uſus raritas, ea ſtatim ad praxin revocare prohiberet. Hinc non contenti doctiores iis, quæ à Geometris aut Arithmeticis demonſtrata atque inventa ſunt, quæque uſus dudum confirmavit, niſi vel ipſas demonſtrationes penetrare, eaſdemque invenire poſſint; adeoque

ſuperflua reſcindere, defectus ſupplere, & deperdita reſtituere queant. Neque enim exiſtimandum eſt, majores noſtros omnem poſteris præripuiſſe materiem, quâ excolatur ingenium; cùm contra ſocordiæ meritò nos incuſarent, ſi plus temporis in ſcriptis ſuis etiamnum intelligendis impendi, quàm ipſi in incognitis inveniendis poſuère, viderent. Ad quæ invenienda cùm non aliâ viâ, (quantum conſtat) quàm quæ per compoſitionem & reſolutionem procedit, uterentur, quæque naturalis potiùs ingenii facultas aut induſtria, uſu & exercitatione potita, quàm ars certis legibus & præceptis contenta, dici meretur; Recentiores artem quandam excogitarunt, quam vocant Analyticam, cujus principia tradit hoc opuſculum. quæ poſtquam innotuit, lon-

longè plura & majora, quàm ab Antiquitate nobis relicta ſunt, in lucem prodiêre. Non patitur tempus & lex ſcribendi, ut commemorem, quanta ex hac arte, non tantùm ad Arithmeticam, Geometriam, Mechanicam, ſed etiam Opticam aliasque ſcientias manaverint emolumenta. Nihil enim ſani antehac de viſu novimus, cum omnia hîc, ſicut in aliis artibus, quæ materiæ immerſæ, non abſtrahuntur à ſenſibus, ad directionem mentis, diſputationibus huc illuc trahebantur; jam omnia determinata, omnia demonſtrationibus munita. Qui enim in Opticis non planè hoſpites ſunt, ſat ſciunt, quàm incerta, quamque defectuoſa fuerint ea, quæ de Refractionum legibus antea novimus, & quàm falſa illa determinatio figuræ vitrorùm, (de quibus Dio-

Dioptrica agit) quâ nihil jam nobis optari poteſt perfectius, nihil certius. ſed de his forſan aliàs. Id mihi in præſens ſufficit, hanc artem ſibi proprio jure vendicare non ſolùm ea, quæ de Matheſeos utilitate, deque Arithmeticæ, Geometriæ, Aſtronomiæ, & Muſicæ præſtantia, tot rationibus, tot voluminibus, totque ſeculis dicta ſunt, ſed & multò plura; quod facilè demonſtrare poſſem, niſi plurimis, qui hæc penitiùs introſpicere dignantur, notum id fore ſcirem. Nec opus mihi eſt, multa coram Te, Heros Perilluſtris, de hujus artis totiuſque Matheſeos utilitate dicere: quoniam, dum animus tuus magna ſemper & excelſa meditatur, Mathematicas etiam ſcientias coluiſti & amplexus es, nihilque Tibi ad ſapientiæ complementum deeſſe voluiſti. Sed malo de He-

Heroïcis & eximiis tuis virtutibus tacendo, publicum omnium teſtimonium implorare, quàm in præſens pauca dicere. Ars ſanè Analytica perſpectum habet, cujus viri præſidium expectat, cùm implorat tuum: nec enim Daniæ unquam, quamdiu Matheſis àliæque artes liberales tales invenerint Patronos, vel virtus vel ſapientia deficiet. Patere igitur, Heros Perilluſtris, nomini tuo Principia hæc inſcribi, & fructum inceptæ peregrinationis ſerenâ fronte accipe. Tui enim nominis clypeo munita, frontem audent obvertere hoſtibus, quibus ſeculum hoc abundat, quique varia tela in obvios effundere non verentur, prout affectus malevoli ipſis dictaverint. Solent plerique, qui rodere amant, objicere, pervulgata omnia eſſe & ex aliis deſumpta; quâ cenſura quam-

quamquam ſciam hoc ſcriptum non poſſe notari; tamen præſagit animus, fore, ut hæc tanquam inutilia & nimis curioſa rejiciant. Si enim intellexerint, hoc ambitu, etiam Algebram complecti, faſtidio commoti, ſubtilitates ejus cane pejus & angue fugient. Sed vix metuet ſibi Ars Analytica à talibus hoſtibus, nam, cum doctiſſimis quibusque Mathematicis, quibus ſeculum hoc quaſi ſuperbit, probetur, de reliquis ipſi minus eſt laborandum: nec ulla alia hujus Methodi defenſio requiritur, niſi quam experientia, & ipſius rei intellectæ uſus attulerit. Et, ut verba in pauca conferam, ſi tuo exactiſſimo limatiſſimoque judicio probentur, nullius in poſterum cenſuram aut notam pertimeſcent. Neque ego exilitate operis deterritus, ſed contra utilitate potius

tius inſtigatus, Tibi hæc conſecrare ſum veritus: & quidem tantâ majore fiduciâ, & ſpe certiore, quantò certius mihi conſtat Te omnibus iis, qui inter bonas artes etiam Mathematicis incumbunt, favere; quem favorem quotidiè familia noſtra ſentit, & grato animo ſemper recolit. Vale regni Daniæ decus, & æqui bonique conſule hoc grati animi monumentum, quod humillimè offert

PERILLVSTRIS GENEROSITATIS TVAE

Scribebam Leidæ,
Anno cIↄ Iↄc L.
Calend. Iun.

Devotiſſimus & obſequentiſſimus cliens

ERASMIUS BARTHOLINUS.

LECTORI S.

CVm omnes ſapientes audire velint, & nihil tam temerarium tamque indignum ſapientis gravitate atque conſtantia ſit, quàm aut falſum ſentire, aut quod non ſatis exploratum ſit, ſine ulla dubitatione defendere: neſcio quo fato fiat, quòd non operam dent ejuſmodi ſtudiorum viam ingredi, quâ mens adſueſcat verum à falſis & dubiis diſtinguere. Quandoquidem enim à teneris adſueſcere multum eſt, egregiè ſibi conſulerent, ſi ad Matheſin excolendam ab ineunte ætate animum appellerent. Mathematicas autem diſciplinas hanc præ aliis habere prærogativam, vix dubitari poteſt, modò conſideretur, quicquid in iis concluditur & determinatur, id omne ex præmiſſis neceſſitate quadam ſequi, vel verum, vel dubium, vel falſum, prout præmiſſæ variis modis ſeſe habuerint: Adeò ut, etſi non aliis uſibus inſerviret Matheſis, tamen vel hoc nomine, ad ſui cognitionem trahere deberet etiam eos, quibus nullum aliud ex ea ſperaretur emolumentum. Quod cum abundè obſervatum & uſu comprobatum ſit à Veteribus, quos plerique noſtra ætate ita ſuſpiciunt & venerantur, ut majus quoddam animo complexi, plus multo etiam vidiſſe videantur, quàm quantum noſtrorum ingeniorum acies intueri poteſt; inter alia mirari ſubit, omnes ferè, exemplum illorum hac in re deſeruiſſe. Quippe compertum eſt, antiquos Philoſophos non permiſiſſe, ἀγεωμέτρητȣς ſcholas ſuas ingredi, ut ad Sapientiæ ſtudium admitterentur, quique ante non haberent λαβὰς τῆς φιλοσοφίας. Quod ſanè propoſitum, non ratione prudentius, quàm eventu felicius fuit: cum hanc fuiſſe cauſam, quòd ad illam pertigerint ſcientiam, quam poſteritas tantopere miratur, & quò virtute ſua nonnulli eniti ſe poſſe deſperant, conjiciam. Fruſtra enim ſpectatur fructus diſciplinarum, ab eo, qui earum altitudinem non metitur; nec in cacumen evadere

poteſt, qui non ſolerter rimatur viam, & aditus, qui eò ferunt, negligit. Matheſis autem, cum ex notionibus ſimpliciſſimis, cognituque facillimis, ad difficiliora, atque remotiſſima quæque cognoſcenda perducat juniores, qui præconceptis opinionibus vacui non impediuntur varietate rerum, quæ animis provectiorum inhærent; non dubito, quin ſi ea à teneris imbuatur mens, ad aliarum quoque rerum, maximè compoſitarum atque obſcuriorum, cognitionem ſit penetratura. Et quoniam Matheſis variis partibus conſtat, quæ omnes circa quantitatem verſantur; res à noſtri ſeculi Luminibus eò redacta eſt, ut generaliter illæ omnes tractari, & quantitas hæc in univerſali & abſtracto per literas Alphabeti concipi poſſit. Ita enim, factâ ad omnes quantitatis ſpecies applicatione, intellectus ratiocinando ad varias res inveniendas diſtinctè progredi poteſt. Poſtquam autem Methodus illa diu latuit, tecta verborum involucris, cum quibus prius luctandum erat quàm fructus ullus ſperari poterat; opportunè nobis Nobiliſſimus D. Des-cartes, inſuperabilis ingenii Vir (qui, recluſâ à ſe, hactenus incognitâ, ad veram ſapientiam viâ, poſt tot ſeculorum fœdiſſimam ſervitutem, omnibus imitando exemplo, ita naturæ myſteria pandit, ut veræ ſapientiæ ſtudium, humanarumque ſcientiarum encyclopædia & perfectio, immaturâ ejus ac deplorabili morte, majorem nunquam jacturam facere potuerit) eam ad hanc facilitatem perduxit, ut, quod difficultatis reliquum eſt, non aliâ ratione quàm ſtudio & diligentia evinci poſſit. Taceo hîc perfectionem, ad quam res Mathematicas hujus Methodi ſubſidio redegit: cum ipſarum teſtimonia non tantùm invitos laudumque ſuarum detractores in illis palmam ei dare cogant, ſed etiam quouſque, humanum ingenium in iiſdem progredi quidve præſtare valeat determinent. Verùm enimvero cum omnium magnarum rerum ſicut arborum altitudo nos delectet, & radices

dices ſtirpeſque non item: ſic multi ad ſumma pervenire optarent, niſi in elementis hærere opus haberent. atqui, quemadmodum illa altitudo ſine radicibus, ſtirpibuſque eſſe non poteſt; ita illi fruſtra ſe in id faſtigium recipi ſperant, quibus cordi non eſt fundamenta fideliter jacere. Et cum antehac non edita ſint ulla principia, quæ ad adita hujus Methodi ducerent; quid mirum? ſi multi in ipſo limine hæſitaverint, plureſque, quos, re inexpertâ, deſperatio in fugam averterit. Etenim nec hujus Methodi Auctor, nec Doctiſſimi ejus Commentatores à ſemetipſis impetrare potuerunt, ut bonas horas, quas ſubtilioribus inventis dicaverant, in edendis, quæ viam ad hanc Methodum ſternerent, impenderent. Cum itaque nihil hac in re, omnibus votis, tam à me ipſo olim, quàm à multis hodie expetita, præſtitum eſſe repererim: diu multumque inter ſpem & metum hærens, dolui, tamdiu inter tot Mathematicorum monumenta ea deſiderari, quæ ad ſcientiarum incrementa emunctioris naris homines neceſſariò requiri jampridem cenſuerunt. Ego ſanè opportunitate mira, ante aliquot annos voti campos factus, poſtquam ad haſce oras Academiam Illuſtrem, quæ Leidæ eſt, acceſſi, Vir Celeberrimus atque Doctiſſimus Franciſcus à Schooten, Matheſeos ibidem Profeſſor publicus, me Artem Analyticam, hancque Methodum, tam eximia fide docuit, ut ad perfectionem nihil mihi præter ingenium & propriam induſtriam defuiſſe crediderim. Quocirca ſepoſitâ privati commodi æſtimatione ut plures felicitatis hujus participes facerem, & quæ propriis uſibus deſtinaveram, publici juris redderem, de elementis hiſce, quibus inter alia imbutus eram, evulgandis, cogitare cœpi. Et licèt vererer ne amicitiæ jura, quæ inter nos cum fido ſemper ſervari optabam, hac ratione violarem; tamen facilem mihi veniam ſperabam, ſi non niſi officioſa fraude fallerem, quæ gloriæ ejus, qui ſe bono

publico

publico uni devovit, cedere, nec aliàs magis animum meum gratum teſtari poſſet. Ac ne primas quidem ſpes fortuna deſtituit: quippe ab ipſo, qui nullum erga me benevolentiæ pignus atque indicium omittit, non modò veniam hujus zeli impetravi, ſed & eam humanitatem, ut omnia perlegere & examinare haud gravatus fuerit, lucemque ingenii & conſilii ſui porrigere. Operis brevitatem quod attinet, non eſt, quam diſplicere cuipiam putem: ſiquidem copiam exemplorum, quibus ad diſcendum nihil aptius, nullus (ut opinor) hîc deſiderabit; in quibus afferendis ejuſmodi delectus eſt obſervatus, ut, quoad fieri potuit, in medium adducerentur ea, quæ vel in ipſo Auctore, vel in ejus Commentatoribus reperiuntur: quæ ideo ſparſim ita ſunt diſpoſita, ut, meo judicio, non alio loco meliùs intelligi, ſimulquè prædictis locis illuſtrandis inſervire potuerint, in quem finem, in margine paginarum citationem additam eſſe apparebit. Adeò ut, quicunque tantùm Arithmeticæ Species, cum in integris, tum in fractis perdidicerit, levique numerorum irrationalium notitiâ inſtructus, in allatis exemplis accuratè examinandis ſeſe exercuerit, ſe non inutiliter tempus, ubi ad Geometriam Dni. Des-Cartes acceſſerit, conſumpſiſſe experturus ſit. Quin imò videbit januam reſeratam omni ei, quod ab Algebra & Analyſi Geometrica exſpectari poteſt: ideoque ſe Matheſeos Univerſalis conſtitutionem animo comprehendiſſe. neque enim exiſtimo, hiſce intellectis, operæ pretium fore, Algebræ vulgaris cognitionem ampliùs exoptare, licèt leviorem ejus notitiam, vel ipſe D. Des-Cartes, antehac, ad ſuæ Geometriæ Methodum intelligendam, requiſiverit. Vale.

PRIN-

PRINCIPIA MATHESEOS VNIVERSALIS,

SEV

INTRODVCTIO AD GEOMETRIÆ METHODVM RENATI DES-CARTES.

DE LOGISTICA QVANTITATVM SIMPLICIVM.

CVM in omni Scientia, ad difficiliorum rerum cognitionem, utile ſit à ſimpliciſſimis & cognitu facillimis ordiri; haud inconſultum fuerit, ad generalem atque facilem comprehenſionum Mathematicarum Scientiarum, quæ omnes circa quantitatem verſantur, ad ea primùm attendere, quæ non aliquam ejus ſpeciem excludere, ſed eas, quocunque ſe habeant modo, ſub certis notis cuique obviis repræſentare poſſint. Vnde cum in univerſa illarum Scientiarum conſtitutione, licèt diverſa objecta reſpiciant, non niſi relationes ſive proportiones quædam, quæ in iis reperiuntur, conſiderentur; conſentaneum eſt rationes atque proportiones illas ſeorſim ſpectare, easque literis Alphabeti, utpote notis ſimpliciſſimis nobisque cognitiſſimis, inſignire. Neque enim ratio ulla eſt, quo minùs per *a*, *b*, *c*, &c. concipiantur magnitudines *a*, *b*, *c*, &c. quàm pondera aut numeri iiſdem characteribus deſignati. Attamen quia tum phantaſiæ tum ſenſibus ipſis, nihil ſimplicius nec diſtinctius exhiberi poſſe occurrit, quàm rectæ lineæ, quæque relationes & proportiones, quæ inter omnes alias res inveniuntur, exprimere valent: præ-

Vide diſſertationem de methodo, parte ſecunda.

ſtat per prædictas literas ſolummodo lineas rectas concipere. Hinc ſi duæ fuerint quantitates deſignatæ per *a* & *b*, intelligentur per ipſas duæ differentes lineæ rectæ, diverſæ ſcilicet longitudinis: ita ut per *a* intelligatur longitudo ſeu quantitas unius, & per *b* longitudo ſeu quantitas alterius. Non ſecus atque per *a* & *a*, aut per *b* & *b* duæ intelliguntur lineæ æquales; niſi indicaveris ſuppoſueriſve *a* eſſe æqualem ipſi *b*, vel *a* & *b* ejuſdem eſſe valoris, id quod ſic denotatur $a \propto b$. Et ſic de aliis.

Cum autem non rarò occurrat, ut linea aliqua ſit aliquoties ſumenda, oportet tantùm numerum convenientem ipſi literæ præfigere: Vt ad deſignandum, lineam *a* eſſe bis ſumendam, ſcribo $2a$. Sic & ad deſignandum duplum, triplum, quadruplum &c. ipſius *b*, ſcribo $2b$, $3b$, $4b$ &c. Nec aliter fit ſi ad deſignandum ſemiſſem, tertiam aut aliam quamcunque partem lineæ *a*, ſcribatur $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, &c. id quod etiam hoc pacto fieri ſolet $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, &c. ſic & duas tertias, tres quartas, &c. ipſius *b*, ita deſignaveris $\frac{2}{3}b$, $\frac{3}{4}b$: vel ſic, $\frac{2b}{3}$, $\frac{3b}{4}$, atque ita de aliis.

Iam cum in univerſa Matheſi operationes omnes ad quinque diverſas (vulgò Species dictas) reduci poſſint, quæ ſunt Additio, Subtractio, Multiplicatio, Diviſio, & Radicum extractio; conſequens eſt ut oſtendatur, quâ ratione dictæ operationes per literas ſint inſtituendæ.

De Additione quantitatum ſimplicium.

IGitur ad addendum lineam *a* ad lineam *a*, ſcribo pro ſumma $2a$: ſic & ad addendum $2b$ ad $3b$, ſcribo $5b$. Lineæ enim eiſdem literis ſi denotantur, oportet tantùm numeros præfixos addere, & ſummam eidem literæ præfigere. Si verò diverſæ fuerint, additio fiet interpoſito ſigno $+$, quod denotat plus. Vt ſi ad lineam *a* ſit addenda linea *b*, ſcribo $a + b$, hoc eſt, *a* plus *b*, quo indicatur *b* eſſe additam ipſi *a*, vel adhuc eſſe addendam. Vbi patet dictum ſignum ſemper eſſe referendum ad ſequentem literam, ſeu quæ priori addi debet.

Nec aliter fit, ſi plures in unam ſummam ſunt colligendæ. Vt ad addendum $2b$, *b*, & $3b$, ſcribo $6b$. Sic & ad addendum *a*, *b*, & *c*, ſcribo $a + b + c$.

Exem-

Exempla additionis ſimplicium.

				$2b$
Add.	$a.$	$2b.$	$3d.$	$b.$
	$a.$	$3b.$	$d.$	$3b.$
Summa	$2a.$	$5b.$	$4d.$	$6b.$

				$a.$
Add.	$a.$	$a.$	$3c.$	$b.$
	$b.$	$2b.$	$4d.$	$c.$
Summa	$a+b.$	$a+2b.$	$3c+4d.$	$a+b+c.$

Vbi notandum, in additione literarum d & $3d$, cogitandum eſſe literam d ſibi præfixam habere unitatem: id quod etiam in ſequenti exemplo & ſimilibus eſt obſervandum: ut & , cùm plures adduntur diverſæ literæ, perinde eſſe quo ordine ſcribantur, ut $a+b$, vel $b+a$.

De Subtractione quantitatum ſimplicium.

IAm verò ad ſubtrahendum lineam $2a$ à linea $5a$, ſcribendum eſt $3a$: ſiquidem lineæ, quæ iiſdem literis ſunt deſignatæ, ſubducuntur, ſubtrahendo tantùm à ſe invicem numeros præfixos. Sic & ſi $2b$ auferantur à $3b$, reliquum erit $1b$ ſeu b. Similiter ſublato d de $4d$, relinquitur $3d$: At a de a manet o ſeu nihil.

Quòd ſi verò lineæ diverſis literis notatæ fuerint, ſubductio fiet interpoſito ſigno —, quod denotat minus. Vt ſi ab a ſubtrahenda ſit b, ſcribo $a-b$, hoc eſt, a minus b, quo indicatur b eſſe ſublatam ex a, vel adhuc eſſe ſubducendam. Vbi patet dictum ſignum ſemper eſſe referendum ad ſequentem literam, hoc eſt, quæ ex priori eſt ſubtrahenda.

Eodem modo, ſublatis $4d$ ex $3c$, reliquum erit $3c-4d$.

Exempla ſubtractionis ſimplicium.

Ex	$5a.$	$3b.$	$4d.$	$a.$	Ex	$a.$	$3c.$	$a.$	$2c.$
ſubtr.	$2a.$	$2b.$	$d.$	$a.$	ſubtr.	$b.$	$4d.$	$4b.$	$d.$
reliq.	$3.a.$	$b.$	$3d.$	o.	reliq.	$a-b.$	$3c-4d,$	$a-4b.$	$2c-d.$

Vnde notandum, in ejuſmodi quantitatum ſubtractione, oportere quantitatem illam, quæ ex alia ſubtrahi debet, eſſe minorem:

 hoc

hoc eſt, ad ſubtrahendum *b* ex *a*, (ut in ſuperiori exemplo) opùs eſſe, ut *b* ſit minor quàm *a*. Quòd ſi autem non proponatur aut conſtet, utra quantitas ſit major aut minor, & tamen ſubductio fieri debeat; differentia earum denotari poterit hoc modo: *a* ⚌ *b*, hoc eſt, *a* — *b* vel *b* — *a*.

De Multiplicatione quantitatum ſimplicium.

PORrò ad multiplicandum lineam *a* per lineam *b*, ſcribo *ab* vel *ba*. Sic & ad multiplicandum *a* per *a*, hoc eſt, *a* in ſe, ſcribo *aa* ſeu a^2: & *aaa* ſeu a^3 ad prædictum productum *aa* adhuc ſemel multiplicandum per *a*. Adeò ut literæ immediatè ſeſe conſequentes, multiplicationem earum per invicem factam, vel adhuc faciendam eſſe, indicent. Non ſecus, ſi multiplicare velim *a*, *b* & *c* per invicem, ſcribo *abc*, vel *bac*, vel *cba* &c: & *abb* ſeu ab^2 vel b^2a, ad multiplicandum *a*, *b*, & *b*. Hîc enim, ut in additione, non refert, quo ordine ſcribantur.

Quemadmodum verò ex ductu alicujus numeri in ſe, id quod producitur vocatur Quadratum ejuſdem numeri, & ſi productum illud adhuc ſemel per eundem numerum multiplicetur, productus numerus appellatur ipſius Cubus, atque ita deinceps; ita quoque ſi *a* multiplicetur per *a*, productum *aa* ſeu a^2 appellari conſuevit *a* quadratum, ſeu *a* duarum dimenſionum; & ſi *aa* rurſus multiplicetur per *a*, producetur *aaa* ſeu a^3, quod ideo appellari poterit *a* cubus, ſeu *a* trium dimenſionum: atque ita a^4, a^5, a^6, &c. dici poterunt *a* quadrato-quadratum, *a* ſurdeſolidum, *a* quadrato-cubus, &c. ſeu, *a* habens 4, 5, aut 6, &c. dimenſiones.

Sicuti autem numerus aliquis, ſi in ſe ducatur, dicitur radix quadrata iſtius producti ſeu quadrati: & ſi adhuc ſemel per hoc productum multiplicetur, tum radix Cubica hujus poſterioris producti appellatur, &c; ſic & *a* dicitur radix Quadrata ex *aa* ſeu a^2, & radix Cubica ex a^3, & radix Quadrato-Quadrata ex a^4, & radix Surſolida ex a^5, & radix Quadrato-Cubica ex a^6, atque ita porrò. Idem de reliquis eſt intelligendum.

Ex quibus conſtat diligenter eſſe notandum, quòd magnum ſit diſcrimen inter aliquam quantitatem, cui numerus aliquis præfixus eſt, & inter eandem quantitatem, ubi idem numerus à tergo eſt adſcriptus. Vt inter 2*a* & a^2, 3*a* & a^3, 4*a* & a^4, &c. ſiquidem per

per 2 *a*, 3 *a*, 4 *a*, &c. ſimpliciter intelligitur quantitas *a* bis, ter, quater, &c. ſumpta, hoc eſt, *a* ſibi ipſi toties addita: at verò per a^2, a^3, a^4, &c. Quadratum, Cubus, Quadrato-Quadratum, &c. ipſius *a*, hoc eſt, ipſa quantitas *a* toties poſita & multiplicata.

Exempla multiplicationis ſimplicium.

Multipl.	$a.$	a	aa	ab	ab	ab	aa	$a^3.$
per	$b.$	a	a	c	b	cd	ab	$a^3.$
productum	$ab.$	$aa.$	$a^3.$	$abc.$	$abb.$	$abcd.$	$a^3b.$	$a^6.$

Vbi notandum in $a^3 b$, producto multiplicationis quantitatum *aa* & *ab*, numerum ternarium quantitatem præcedentem *a* reſpicere, non autem ſequentem *b*: quod, cum brevitatis cauſâ ſcribatur pro *aaab*, in omnibus ſimilibus caſibus quoque eſt intelligendum. Eâdem ratione, ad multiplicandum a^3, hoc eſt, *aaa* per a^3 ſeu *aaa*, producetur a^6, hoc eſt, *aaaaaa*.

Quòd ſi quantitates occurrant multiplicandæ, quibus numeri, ſive integri ſive fracti præfiguntur, oportebit dictos numeros in ſe invicem ducere, ut in vulgari Arithmetica, & eorum productum præfigere producto, quod exſurgit ex multiplicatione quantitatum dictarum. Vt ad multiplicandum 2 *a* per 3 *b*; multiplicatis 2 per 3, provenit 6, quod ſi præfigatur ipſi *ab*, producto quantitatum *a* & *b* per invicem, erit quæſitum productum 6 *ab*. Similiter multiplicatis 2 *b* per *c*, productum erit 2 *bc*. nam unitas, quæ hîc ipſi *c* præfigi ſubintelligitur, ducta in 2, producit 2.

Nec aliter fit, ſi ad multiplicandum 3 *ab*, hoc eſt, ter *ab* per 2 *cd*, hoc eſt, bis *cd*, ſcribatur 6 *abcd*. Sic &, multiplicatis $\frac{1}{2}aa$ per $\frac{1}{3}ab$, hoc eſt, ſemiſſe ipſius *aa* per tertiam partem ipſius *ab*, productum fiet $\frac{1}{6}a^3 b$, hoc eſt, $\frac{1}{6}aaab$.

Exempla multiplicationis.

Multipl.	$2a$	$2b$	$\frac{3}{2}a$	$3ab$	$\frac{1}{2}aa$	a^3	$6a^3.$
per	$3b$	c	$\frac{1}{2}d$	$2cd$	$\frac{1}{3}ab$	$3b^3$	$\frac{2}{3}a^3.$
product.	$6ab.$	$2bc.$	$\frac{3}{4}ad.$	$6abcd.$	$\frac{1}{6}a^3b.$	$3a^3b^3.$	$4a^6.$

Vbi tandem ſciendum, quòd licet ex multiplicatione producantur quantitates plurium dimenſionum ſeu literarum; earum

tamen additionem atque ſubtractionem non aliter fieri atque præcedentium. Vt ad addendum $2ab$ ad $3ab$, ſcribitur $5ab$: & ad addendum $6ab$ ad $2bc$, ſcribitur $6ab+2bc$. Non ſecus, ad ſubtrahendum $2ab$ de $3ab$, ſcribitur ab: & ad ſubtrahendum $2bc$ de $6ab$, ſcribitur $6ab-2bc$, Et ſic de aliis.

De Diviſione quantitatum ſimplicium.

QVoniam verò diviſio reſolvit id, quod multiplicatio componit: facilè apparet, ad dividendam quantitatem ab ſeu ba per a, opùs tantùm eſſe ex quantitate dividenda ab tollere quantitatem a, quæ diviſor eſt, & pro quotiente ſcribere reliquam quantitatem b. Eodem modo, ſi dividatur aa per a, orietur a; & aaa ſeu a^3 per a, orietur aa. Non ſecus diviſâ abc per a, fiet bc: at per b, fiet ac: & per c, fiet ab.

Quòd ſi verò quantitates dividendæ occurrant, quibus numeri ſint præfixi; oportet, factâ diviſione quantitatum, ut jam oſtenſum eſt, ſimiliter dictos numeros dividere, ut in Arithmetica vulgari, & quod oritur invento quotienti quantitatum præfigere.

Exempla diviſionis ſimplicium.

$\begin{matrix}\text{Divid. } ab \\ \text{per } a\end{matrix}\Big\}\, b. \text{ quot. } \begin{matrix} aa \\ a\end{matrix}\Big\}\, a. \begin{matrix} a^3 \\ a\end{matrix}\Big\}\, aa. \begin{matrix} abc \\ a\end{matrix}\Big\}\, bc. \begin{matrix} abc \\ ab\end{matrix}\Big\}\, c. \begin{matrix} a^3b \\ ab\end{matrix}\Big\}\, aa. \begin{matrix} a^5 \\ aa\end{matrix}\Big\}\, a^3.$

$\begin{matrix}\text{Divid. } 6ab \\ \text{per } 2a\end{matrix}\Big\}\, 3b. \begin{matrix} \frac{1}{6}a^3b \\ \frac{1}{3}ab\end{matrix}\Big\}\, \frac{1}{2}aa. \begin{matrix} 3a^3b^3 \\ 3b^3\end{matrix}\Big\}\, 1a^3 \text{ ſeu } a^3. \begin{matrix} 3a^3b^3 \\ a^3\end{matrix}\Big\}\, 3b^3.$

Cùm autem occurrunt quantitates dividendæ, ex quibus literæ diviſoris præcedenti modo tolli nequeunt; ſubſcribitur Diviſor ipſi Dividendo interjectâ lineolâ, ad modum fractionis Arithmeticæ vulgaris. Vt ad dividendum ab per c, ſcribo $\frac{ab}{c}$, quo indicatur ab eſſe diviſam per c, vel adhuc eſſe dividendam. Sic & ad dividendum a per b, ſcribitur $\frac{a}{b}$. ſimiliter diviſâ abc per de, quotiens erit $\frac{abc}{de}$. & ſic de aliis. Quæ quidem quantitates ſic diviſæ appellantur Fractiones.

Eſt verò hîc obiter notandum, diviſis a per a, $2b$ per $2b$, ſimilibuſve, quotientem eſſe 1: ſiquidem quævis quantitas ſe ipſam ſemel continet, ideoque per ſeipſam diviſa, unitatem profert.

DE

DE LOGISTICA QVANTITATVM COMPOSITARVM.

EXplicatâ Simplicium quantitatum operatione, quoniam ex illarum additione & ſubtractione oriuntur quantitates, per ſignum + compoſitæ, aut per ſignum — disjunctæ, (quæ communiter generali nomine Compoſitæ dicuntur); conſequens eſt, ut harum quoque operationem deinceps oſtendamus.

De Additione quantitatum compoſitarum.

IGitur ad addendum quantitates Compoſitas, iiſdem literis notatas, oportet conſiderare ſigna + & —, quibus afficiuntur, & notare, ſi eadem fuerint, additionem fieri ut in ſimplicibus, & earum ſummæ præfigi idem ſignum. Vt ad addendum $a + 3\,b$ ad $a + 2\,b$: additis a ad a, & $3\,b$ ad $2\,b$, ſumma erit $2\,a + 5\,b$. Eodem modo $2\,a - b$ additum ad $3\,a - 3\,b$, facit ſummam $5\,a - 4\,b$.

Quòd ſi verò ſigna diverſa fuerint, ſubtrahendæ erunt quantitates eiſdem literis denotatæ, ſicut in ſubtractione ſimplicium, & ei quod relinquitur præfigendum eſt ſignum, quo major quantitas afficitur. Vt ſi addendum ſit $3\,b + 5\,a$ ad $2\,b - 2\,a$: additis $3\,b$ ad $2\,b$, & ſubtractis $2\,a$ ex $5\,a$, ſumma erit $5\,b + 3\,a$. Similiter ſi $a + d$ addatur ad $a - 4\,d$, fiet ſumma $2\,a - 3\,d$. Vbi patet ſi $2\,b + a$ addatur ad $3\,b - a$, ſummam fore $5\,b$: quantitates enim $+\,a$ & $-\,a$, cum propter diverſa ſigna ſint ſubtrahendæ, ſe mutuò tollunt.

Iam ad addendum quantitates diverſis literis denotatas, oportet tantùm eas ſuis ſignis connectere. Vt ad addendum $a + b$ ad $c - d$, ſcribo $a + b + c - d$: ſiquidem quantitas c, & omnis alia cui nullum præponitur ſignum, intelligitur ſibi præfixum habere ſignum +.

Exempla additionis compoſitarum.

Add.	$a + 3\,b$	$2\,a - b$	$\frac{1}{2}ab + \frac{2}{3}bb$	$a^3 - \frac{5}{4}abc$	$aa + 2\,a - 3.$
	$a + 2\,b$	$3\,a - 3\,b$	$\frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}bb$	$\frac{2}{3}a^3 - \frac{3}{4}abc$	$aa + a - 6.$
ſumma	$2a + 5\,b.$	$5\,a - 4\,b.$	$ab + bb.$	$\frac{5}{3}a^3 - 2\,abc.$	$2aa + 3\,a - 9.$

Add.	$3b + 5a$	$a + d.$	$2b + a$	$aa - 2ab$	$3a^3 - \frac{1}{3}aab$	$aa - 5\,a + 6.$
	$2b - 2a$	$a - 4d.$	$3b - a$	$aa + ab$	$2a^3 + \frac{1}{2}aab$	$aa + a - 6.$
aggr.	$5b + 3a.$	$2a - 3d.$	$5b.$	$2aa - ab.$	$5a^3 + \frac{1}{6}aab.$	$2aa - 4a.$

Add.

Add.	$a+b$	$2aa+3ab-bb$	$3abc$	$a^3+2abb-aab+abc$.
Summa	$c-d$	$5ab-3aa$	a^3-abc	$a^3+aab-3abb-b^3$.
ſeu aggr.	$a+b+c-d$.	$8ab-aa-bb$.	a^3+2abc.	$2a^3-abb+abc-b^3$.

E quibus manifeſtum fit, (cum ad addendum $3b+5a$ ad $2b-2a$, ſcribi poſſit $3b+5a+2b-2a$, hoc eſt, $5b+3a$: ſiquidem $+3b$ & $+2b$ faciunt $5b$, & $+5a-2a$ faciunt $+3a$) quantitates eiſdem literis denotatas, quando diverſa habent ſigna, ſubtrahendas eſſe, & ſummæ aſcribendum eſſe ſignum majoris quantitatis.

De Subtractione quantitatum compoſitarum.

POrrò ad ſubtrahendum quantitates compoſitas, quæ eiſdem literis ſunt denotatæ, ſciendum eſt: ſi ſigna eadem fuerint, & quantitas è qua ſubtractio fieri debet, major ſit quantitate ſubducendâ; tum ſubtractionem fieri ut in ſimplicibus, & ei quod relinquitur præfigendum eſſe idem ſignum. Vt ſi ſubtrahatur $a+2b$ ex $2a+5b$: (ſubtractis a ex $2a$, & $2b$ ex $5b$,) remanet $a+3b$. Non ſecus ſi ſubtrahatur $3a-3b$ ex $5a-4b$, reliquum erit $2a-b$.

Si verò ſigna eadem fuerint, & quantitas à qua ſubtractio fieri debet quantitate ſubducendâ minor ſit; oportet, ſubtractâ minore ex majore, reſiduo ſignum contrarium præponere. Vt ſi ſubtrahendum ſit $a+3b$ ab $3a+2b$: ſubtractis a ex $3a$, & $2b$ ex $3b$, reſiduum erit $2a-b$. Similiter, ſublatis $a-3b$ ex $2a-b$, relinquitur $a+2b$.

Quòd ſi quantitates iiſdem literis deſignatæ, atque ad ſubtrahendum propoſitæ, diverſa ſigna habeant; erunt ipſæ addendæ, ut in ſimplicibus, & ſummæ præfigendum ſignum quantitatis, à qua ſubductio fieri debet. Vt ſi velimus ſubtrahere $a-b$ ex $2a+b$: ſubtractis a ex $2a$, additisque b ad b, reſiduum erit $a+2b$. Eodem modo, $2a+5d$ ſubductum à $3a-2d$, relinquet $a-7d$.

Cæterùm ad ſubtrahendum quantitates diverſis literis denotatas, oportet quantitates ſubducendas, variatis ſignis connectere cum iis, à quibus ſubductio fieri debet. Vt ſi ſubtrahi debeat $c-d$ ab $a+b$; erit differentia ſeu reſiduum $a+b-c+d$: variatis nempe ſignis quantitatum c & d.

Exem-

Exempla ſubtractionis compoſitarum.

Ex	$2a+5b$	$5a-4b$	$\frac{1}{2}ab+\frac{2}{3}bb$	$a^3-\frac{5}{4}abc+abb-b^3$	$2aa+3a-9.$
Subtr.	$a+2b$	$3a-3b$	$\frac{1}{4}ab+\frac{1}{3}bb$	$\frac{2}{3}a^3-\frac{3}{4}abc+abb-b^3$	$aa+2a-3.$
Reliq.	$a+3b$	$2a-b.$	$\frac{1}{4}ab+\frac{1}{3}bb.$	$\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}abc.$	$aa+a-6.$
Ex	$3a+2b$	$2a-b$	$2aa-ab$	$5a^3+\frac{1}{6}aab-\frac{2}{3}abb$	$3aa-2a+6.$
Subtr.	$a+3b$	$a-3b$	$aa-2ab$	$2a^3+\frac{1}{2}aab-abb$	$2aa-3a+9.$
Reſid.	$2a-b.$	$a+2b.$	$aa+ab.$	$3a^3-\frac{1}{3}aab+\frac{1}{3}abb.$	$aa+a-3.$
Ex	$2a+b$	$3a-2d$	$8ab-aa$	$3a^3-\frac{1}{3}aab+\frac{2}{3}abb-b^3$	$3aa-2a+6.$
Subtr.	$a-b$	$2a+5d$	$2aa-3ab$	$-2a^3+\frac{2}{3}aab$	$aa+a-3.$
Diff.	$a+2b.$	$a-7d.$	$11ab-3aa.$	$5a^3-aab+\frac{2}{3}abb-b^3.$	$2aa-3a+9.$
Ex		$a+b$	$2aa-4a$	$3abc$	$a^3+aab-abb-b^3.$
Subtr.		$c-d$	$aa+a-6$	a^3-abc	$aab-2a^3+c^3-abb.$
Rel. reſid. ſeu diff.		$a+b-c+d.$	$aa-5a+6.$	$4abc-a^3.$	$3a^3-b^3-c^3.$

E quibus perſpicuum fit (cum ad ſubtrahendum $a+3b$ ex $3a+2b$ ſcribi poſſit $3a+2b-a-3b$, hoc eſt, $2a-b$, ſubtractis nempe a ex $3a$ & $2b$ ex $3b$) : quantitates eiſdem literis denotatas, quando eadem habent ſigna, ſed quantitates ſubducendæ aliis ſunt majores, ſubtrahendas eſſe, & relicto præponendum eſſe ſignum contrarium.

Similiter quoniam ad ſubtrahendum $a-b$ ex $2a+b$, ſcribere poſſum $2a+b-a+b$, hoc eſt, $a+2b$, (ſubtrahendo videlicet a à $2a$, & addendo b ad b) patet, quâ ratione, quantitates eiſdem literis deſignatæ, cùm diverſa habuerint ſigna, ſint addendæ, & ſummæ præfigendum ſit ſignum ejus, à quâ ſubtractio fieri debet. Quòd autem ſubtrahendo $a-b$ ex $2a+b$, ſcribendum ſit $2a+b-a+b$, variatis nempe ſignis quantitatum ſubducendarum, inde manifeſtum fit; quòd ad ſubtrahendum a ex $2a+b$ differentia denotetur per $2a+b-a$, utpote ſubducendo quantitatem a, præponendo ei ſignum —, ut in ſubtractione ſimplicium eſt dictum: at quoniam ſubducendo quantitatem a ex $2a+b$, plus juſto tollitur, ſiquidem non a abſolutè tollendum proponitur, ſed diminuta quantitate b; hinc fit, ut $2a+b-a$ minor ſit quàm juſta differentia, quantitate b: adeoque ad veram differentiam obtinendam, oportet addere quantitatem b, & ſcribere $2a+b-a+b$, hoc eſt, $a+2b$. Et ſic de aliis.

De Multiplicatione quantitatum compoſitarum.

POſt hæc, ad multiplicandum quantitates compoſitas, operatio inſtitui poteſt ad modum Arithmeticæ vulgaris: oportet enim earum partes multiplicare in ſe invicem, ut in ſimplicibus eſt oſtenſum, atque producta ſimul addere. Quod autem ad ſigna $+$ & $-$ attinet iiſdem præfigenda, ſciendum eſt: eadem ſigna (hoc eſt $+$ per $+$, vel $-$ per $-$) facere ſignum $+$, diverſa verò (hoc eſt $+$ per $-$, vel $-$ per $+$) facere $-$. Vt ad multiplicandum $a+b$ per c: multiplicatis $+a$ per $+c$, & $+b$ per $+c$, fiunt $+ac$, & $+bc$: quibus additis, fit productum $+ac+bc$, ſeu $ac+bc$. Sic ſi multiplicandum ſit $a-b$ per c, producetur $ac-bc$.

Nec aliter fit, ſi ad multiplicandum proponatur $a+b$ per $c+d$: multiplicatis enim $a+b$ per c, ut ante; & rurſus $a+b$ per d (ſiquidem $a+b$ non tantùm per c, ſed etiam per d multiplicari debet): fiet $ac+bc+ad+bd$. Non ſecus ad multiplicandum $a-b$ per $c-d$ ſcribitur $ac-ad-bc+bd$: multiplicatis nempe primùm $a-b$ per $+c$, fit $+ac-bc$: deinde $a-b$ per $-d$, fit $-ad+bd$. quippe $+a$ per $-d$, producit $-ad$: at $-b$ per $-d$ producit $+bd$, juxta regulam. Et ſic de aliis. Nec refert utrum à dextra an verò à ſiniſtra initium fiat, ſicut ſequentibus exemplis manifeſtum fiet.

Exempla multiplicationis compoſitarum.

Mult.	$a+b$	$a-b$	$a+b$	$a-b$	$a+b$.
per	c	c	$c+d$	$c-d$	$a+b$
prod.	$ac+bc$.	$ac-cb$.	$ac+bc$	$ac-bc$	$+ab+bb$
			$+ad+bd$	$-ad+bd$	$aa+ab$
product.			$ac+bc+ad+bd$.	$ac-bc-ad+bd$.	$aa+2ab+bb$.

Multipl.	$a-b$	$a+b$	$aa-2ab+bb$	$aa-ab+bb$
per	$a-b$	$a-b$	$a-b$	$a+b$
	$-ab+bb$	$aa+ab$	$-aab+2abb-b^3$	$+aab-abb+b^3$
	$aa-ab$	$-ab-bb$	$a^3-2aab+abb$	$a^3-aab+abb$
prod.	$aa-2ab+bb$.	$aa-bb$.	$a^3-3aab+3abb-b^3$.	a^3+b^3.

Mult.

$$\begin{array}{ll} \text{Mult.} & 3dd + 4de + ee \\ \text{per} & 3dd - ee \\ \hline & 9d^4 + 12d^3e + 3ddee \\ & \qquad - 3ddee - 4de^3 - e^4 \\ \hline \text{product.} & 9d^4 + 12d^3e - 4de^3 - e^4. \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 2a^3 + \frac{1}{2}aab + \frac{2}{3}abb \\ \frac{2}{3}ab - \frac{1}{2}aa \\ \hline -a^5 - \frac{1}{4}a^4b - \frac{1}{3}a^3bb \\ + \frac{4}{3}a^4b + \frac{1}{3}a^3bb + \frac{4}{9}aab^3 \\ \hline \frac{13}{12}a^4b + \frac{4}{9}aab^3 - a^5. \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \text{Multipl.} & 4a^3 + 3aa - 2a + 1 \\ \text{per} & aa - 5a + 6 \\ \hline & + 24a^3 + 18aa - 12a + 6 \\ & - 20a^4 - 15a^3 + 10aa - 5a \quad \\ & + 4a^5 + 3a^4 - 2a^3 + 1aa \qquad\quad \\ \hline \text{product.} & 4a^5 - 17a^4 + 7a^3 + 29aa - 17a + 6. \end{array}$$

Cæterùm advertendum hîc eſt, non rarò utile eſſe, multiplicationem hoc modo non inſtituere, ſed tantummodo eam innuere interſerendo voculam *in* vel M. Vt ad multiplicandum $\overline{4a^3 + 3aa - 2a + 1}$ per $aa - 5a + 6$, ſcribo $\overline{4a^3 + 3aa - 2a + 1}$ in $\overline{aa - 5a + 6}$, vel $\overline{4a^3 + 3aa - 2a + 1}$ M $\overline{aa - 5a + 6}$.

Quòd autem + per —, vel — per + faciat —, ſic patet. Eſto $a - b$ multiplicandum per c, & ſit $a - b \infty e$: hinc ſi utrobique addatur b, fiet $a \infty b + e$. Iam quoniam æquales quantitates per eandem quantitatem multiplicatæ producunt æquales; ideo ſi utrinque multiplicetur per c, erit $ac \infty bc + ec$, hoc eſt, auferendo utrinque bc, erit $ac - bc \infty ec$. Quocirca cum ſtatuatur $a - b \infty e$, & utrâque parte ductâ in c, producatur $ac - bc \infty ec$; perſpicuum fit, $-b$ ductum in $+c$, producere $-bc$.

Nec aliter oſtendetur — per — multiplicatum producere +. Etenim ſi $a - b$ multiplicandum ſit per $c - d$: ponendo, ut ante, $a - b \infty e$, erit productum ex $a - b$ in $c - d$ æquale producto ex e in $c - d$ vel $c - d$ in e: id eſt, $ce - de$. Sed ce, ut ſupra, æquatur $ac - bc$: unde $ac - bc - de$ æquabitur producto ex $a - b$ in $c - d$. Porrò cum $a - b$ æqualis ſit poſita ipſi e, & utrâque parte ductâ in d, productum $ad - bd$ æquetur producto de: hinc ſi ex $ac - bc$ ſubtrahatur $ad - bd$ loco de, ei æquale; erit juxta regulam ſubtractionis $ac - bc - ad + bd$ productum quæſitum. E quibus liquet $-b$ multiplicatum per $-d$ producere $+bd$.

De Diviſione quantitatum compoſitarum.

PRæterea, ad dividendum quantitates compoſitas, operatio non abſimilis erit ei, quâ in Arithmetica vulgari duo integri numeri per ſe invicem dividuntur. Quod autem ſigna $+$ & $-$ concernit, ſciendum eſt, ſi dividatur $+$ per $+$, aut $-$ per $-$, ſemper oriri $+$; at ſi $+$ per $-$, vel $-$ per $+$ dividatur, ſemper oriri $-$. omnino ut in multiplicatione. Operationem autem ſive à dextra ſive à ſiniſtra incipias perinde erit. Vt ad dividendum $ac+bc$ per c: diviſis $+ac$ per $+c$, & $+bc$ per $+c$, fiunt ut in ſimplicibus eſt oſtenſum $+a$ & $+b$, unde quotiens quæſitus erit $a+b$. Similiter ſi dividatur $ac-cb$ per c, orietur $a-b$: diviſis enim $+ac$ per $+c$, fit $+a$, & $-cb$ per $+c$, fit $-b$. Non diſſimili ratione dividitur $ac+ad+bc+bd$ per $c+d$, & fit $a+b$. Cujus operatio talis eſt.

Divid.	$ac+ad+bc+bd$	$\frac{+ac}{+c}$	$+a.\ \frac{+bc}{+c}$	$+b.$
per $c+d$)	$\underline{ac+ad+bc+bd}$			
	$0\quad 0\quad 0\quad 0$			
Quotiens	$+a+b.$			

Diviſo ac per c, (ut in ſimplicibus) fit a, ſcribendum ſub linea in quotiente. hinc multiplicato diviſore $c+d$ per quotientem inventum a, productum $ac+ad$ ex dividendo auferatur, ſcribendo partes ejuſdem denominationis ſub invicem, & reliquum ſub linea infra ductâ. Vnde cum ſubducto ac ex ac, & ad ex ad maneat nihil, ſcribitur ſub linea ducta 0. Deinde diviſo $+bc$ per $+c$, fit $+b$, aſcribendum priori quotienti. unde multiplicato diviſore $c+d$ per hunc quotientem b, fit productum $+bc+bd$. id quod ſi ſcribatur, ut ante, ſub dividendo, & fiat ſubductio; erit pro reliquo ſub linea ſcribendum 0. Et peracta erit diviſio.

Eodem modo ad dividendum	$ac-ad-bc+bd$	$\frac{+ac}{+c}$	$+a$
per $c-d$:)	$\underline{ac-ad-bc+bd}$		
	$0\quad 0\quad 0\quad 0$	$\frac{+bc}{+c}$	$-b$
Erit quotiens	$+a-b.$		

Divido primùm ac per c, & fit a, ſcribendum ſub linea in quotiente. Iam multiplicato diviſore $c-d$ per $+a$, fit productum

$ac-$

$ac - ad$, ſubducendum ex dividendo, & relinquitur o. Deinde divido $-bc$ per $+c$, & oritur $-b$, ſub linea ſcribendum in quotiente. Quoniam autem multiplicato diviſore $c - d$ per $-b$, fit productum $-bc + bd$, & eo ex reliquo dividendi ablato, remanet nihil; patet diviſionem eſſe ad finem perductam, & quotientem eſſe $a - b$.

Sic etiam ad dividendum $aa - 2ab + bb$

$$\begin{array}{rl} \text{per } a-b:) & aa - ab \\ & o - ab \\ & -\ ab + bb \\ & \quad o \quad o \\ \text{fit quotiens} & a - b. \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} aa & a \\ a & \\ -ab & -b \\ +a & o \end{array}$$

Divido primùm aa per a, & oritur a, ſcribendum ſub linea in quotiente. Vnde multiplicato diviſore $a - b$ per a, & ablato producto $aa - ab$ ex dividendo, ſcribendum erit reliquum $-ab$ ſub linea ducta infra $-2ab$. Deinde divido $-ab$ per $+a$, & fit $-b$, ſcribendum ſub linea in quotiente. Tum ducto diviſore $a - b$ in $-b$, fit productum $-ab + bb$, quod ſublatum à reliquo dividendi relinquit o. Et erit operatio finita, ac quotiens quæſitus $a - b$.

Eâdem ratione ſi dividendum ſit $aa - bb$ per $a + b$.

$$\begin{array}{rl|l} \text{Divid.} & aa - bb & -ab \\ \text{Diviſ. } a+b) & aa - bb & -ab \\ & o \quad o & o \\ \text{Quotiens} & a - b & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} aa & a \\ a & \\ -ab & -b \\ +a & \end{array}$$

Incipiendo rurſus à primo termino, divido aa per a, & habebitur a, ſcribendum ſub linea in quotiente. Vnde multiplicato diviſore $a + b$ per quotientem inventum a, producetur $aa + ab$, quod ſublatum ex dividendo relinquet $-ab$: & quoniam hîc terminus præter ſuperſtitem $-bb$ ad dividendum huc acceſſit, ideo poſt lineam ei adſcribitur. Deinde divido $-ab$ (nempe id quod modò ad dividendum acceſſit) per $+a$, & habetur $-b$ in quotiente ſub linea ſcribendum. Quo facto, ſi multiplicetur diviſor $a + b$ per hunc quotientem $-b$, exſurget $-ab - bb$ ad ſubtrahendum ex eo, quod relinquitur in dividendo: quod cum poſt ſubtractio-

nem relinquat o; liquet abſolutam eſſe operationem, & quotientem fore $a - b$.

Nec aliter ſe res habet ſi dividatur $a^3 + b^3$ per $a + b$, & incipiatur ab ultimo termino.

Dividend.	$a^3 + b^3$	$-abb$	$+aab$		b^3	bb
					b	
Diviſor $a + b$)	$+a^3 + b^3$	$-abb$	$+aab$		$-abb$	$-ab$
	o o	o	o		$+b$	
Quotiens	$+aa - ab + bb$.				$+aab$	$+aa$
					$+b$	

Etenim diviſo $+b^3$ per $+b$, fit $+bb$, ſcribendum in quotiente. tum ducto diviſore $a + b$ in $+bb$, producitur $+abb + b^3$: Id quod ſi ſubtrahatur ex dividendo, relinquetur $-abb$. Deinde diviſo $-abb$ per $+b$, oritur $-ab$, ſcribendum in quotiente, quo multiplicato per diviſorem $a + b$ exſurgit $-aab - abb$, ad ſubtrahendum ex reliquo dividendi, eritque reſiduum $+aab$. Denique diviſo $+aab$ per $+b$, prodibit $+aa$ ſcribendum in quotiente: unde ſi multiplicetur diviſor $a + b$ per $+aa$, & productum $+a^3 + aab$ auferatur ex reſiduo dividendi, erit reliquum o. Id quod oſtendit, diviſo $a^3 + b^3$ per $a + b$, oriri $aa - ab + bb$, quod erat faciendum.

Sequuntur adhuc nonnulla exempla ad uberiorem exercitationem diviſionis compoſitarum.

Dividend.	$a^3 - 3aab + 3abb - b^3$		$-b^3$	$+bb$
Diviſor $a - b$.)	$+abb - b^3$		$-b$	
	$+2abb$ o		$+2abb$	$-2ab$
	$-2aab + 2abb$		$-b$	
	$-aab$ o		$-aab$	$+aa$
	$a^3 - aab$		$-b$	
	o o			
Quotiens.	$+aa - 2ab + bb$.			

Divi-

Dividend. $9d^4+12d^3e-4de^3-e^4\,|-3ddee$ $\quad -e^4|+ee$ / $-ee|$

Diviſ. $3dd-ee)\,9d^4+12d^3e-4de^3-e^4\,|-3ddee$ $\quad -3ddee|+3dd.$ / $ee|$

o o o o o

Quotiens $+4de+3dd+ee$ $\quad -4de^3|+4de.$ / $-ee|$

Dividend. $\frac{13}{12}a^4b+\frac{4}{9}aab^3-a^5\,|-\frac{1}{3}a^3bb$ $\quad -a^5|+2a^3.$ / $-\frac{1}{2}aa|$

Diviſ. $\frac{2}{3}ab-\frac{1}{2}aa)\,+\frac{4}{3}a^4b+\frac{4}{9}aab^3-a^5\,|-\frac{1}{3}a^3bb$

$-\frac{1}{4}a^4b$ o o o $\quad -\frac{1}{4}a^4b|+\frac{1}{2}aab.$ / $-\frac{1}{2}aa|$

$-\frac{1}{4}a^4b$

o $\quad -\frac{1}{3}a^3bb|+\frac{2}{3}abb.$ / $-\frac{1}{2}aa|$

Quotiens $+\frac{2}{3}abb+\frac{1}{2}aab+2a^3.$

Divid. $d^4-b^4+2aady+2aaby+aadd-aabb\,|-bd^3|+bbdd|-b^3d|-aabd$ Pag. 340.

Div. $d+b)\,d^4-b^4+2aady+2aaby+aadd-aabb\,|-bd^3|+bbda|-b^3a|-aabd$ lin. 4.

o o o o o o o o o o

Quotiens $+d^3-bdd+bbd-b^3+2aay+aad-aab.$

$d^4|d^3.$ / $d|$ $\quad -bd^3|-bdd.$ / $+d|$ $\quad +bbdd|+bbd.$ / $+d|$ $\quad -b^3d|-b^3.$ / $+d|$

$+2aady|+2aay.$ / $+d|$ $\quad +aadd|+aad.$ / $+d|$ $\quad -aabd|aab.$ / $+d|$

Dividend. $+y^6-8y^4-124yy-64$ $\quad -64|+4$ / $-16|$ Pag. 77.

Diviſor $yy-16)\,+y^6+8y^4+4yy-64$

o$-16y^4-128yy$ o $\quad -128yy|+8yy.$ / $-16|$

$-16y^4-128yy$

o o $\quad -16y^4|+1y^4.$ / $-16|$

Quotiens $+1y^4+8yy+4.$

Divi-

Dividend. $+y^6+aay^4-2ccy^4-a^4yy+c^4yy-a^6-2a^4cc-aac^4 \mid +2aaccyy$

Pag. 78. Div. $yy-aa-cc)$ $+y^6-aay^4-ccy^4-2a^4yy+c^4yy-a^6-a^4cc-aac^4 \mid +aaccyy$

$0+2aay^4-ccy^4+a^4yy \quad 0 \quad 0-a^4cc \quad 0 \quad +aaccyy$

$+2aay^4-ccy+a^4yy \quad -a^4cc \quad +aaccyy$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

Quotiens $+y^4+2aayy-ccyy+a^4+aacc.$

$\frac{+y^6}{+yy}\Big| +y^4. \quad \frac{+2aay^4}{+\ yy}\Big| +2aayy. \quad \frac{-ccy^4}{+\ yy}\Big| -ccyy.$

$\frac{+a^4yy}{+\ yy}\Big| +a^4. \quad \frac{+aaccyy}{+\ yy}\Big| +aacc.$

Pag. 380. lin. 15. Dividend. $+\frac{1}{4}q-\frac{1}{4}fq+f^3uuq-fuuq-4f^4u^4q+4f^3u^4q \mid +ffuuq$

Div. $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}f-ffuu+f^3uu)$ $\frac{1}{4}q-\frac{1}{4}fq+f^3uuq-fuuq-4f^4u^4q+4f^3u^4q \mid +ffuuq$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

Quotiens $+q-4fuuq.$

$\frac{+\frac{1}{4}q}{+\frac{1}{4}}\Big| +q. \quad \frac{-fuuq}{+\ \frac{1}{4}}\Big| -4fuuq.$

Quòd ſi quantitates dividendæ occurrant, quæ præcedenti modo dividi nequeunt, ſubſcribendus erit diviſor ipſi dividendo, interjectâ lineólâ, ſicut in fractionibus vulgaribus. Vt ad dividendum $ad-ae$ per $d+e$, ſcribo pro quotiente $\frac{ad-ae}{d+e}$. quo indicatur $ad-ae$ diviſum eſſe per $d+e$, vel adhuc eſſe dividendum. Sic & ſi $bb+bd+cc$ dividatur per $b+d$, fit quotiens ſeu fractio $\frac{bb+bd+cc}{b+d}$, hoc eſt, $b+\frac{cc}{b+d}$. Quippe ſæpe conducit, ut in Arithmetica vulgari, diviſionem, quantùm fieri poteſt, inſtituere, & quod ſupereſt inſtar fractionis quotienti adſcribere. Et tantum de diviſione.

DE EXTRACTIONE RADICIS.

QVoniam autem de Radicis Extractione, quæ pro diviſionis ſpecie haberi poteſt, agendum reſtat, ſciendum eſt, ejus operationem non eſſe diverſam ab illa, quâ in Arithmetica vulgari radix ex dato aliquo numero elicitur.

Etenim

Etenim ut a multiplicatum per a facit aa, ſeu a quadratum, cujus radix ſeu latus dicitur a; ſic & radice quadratâ extractâ ex aa proveniet rurſus a. Similiter cum aa, hoc eſt, a quadratum multiplicatum per a producat a^3 ſeu cubum ex a; ita etiam extractâ radice cubicâ ex a^3, fiet a. Et ſic de cæteris radicibus.

Nec aliter fit ſi ex quantitatibus compoſitis radix ſit extrahenda. Sicut enim ex quantitatibus ſimplicibus radicis extractio non ſecus ſe habet atque extractio radicis ex aliquo numero, quæ tantùm unius ſit characteris: ita radix, quantitas exiſtens compoſita, non aliter extrahetur, ac ſi ex aliquo numero radix, quæ pluribus conſtet characteribus, eliceretur.

Vt ad extrahendam radicem quadratam ex $aa + 2ab + bb$: extraho primùm radicem ex aa, & fit a, quæ in ſe multiplicata & ab aa ablata relinquit o. Deinde multiplicato a per 2, divido $+ 2ab$

Quadratum	$aa + 2ab + bb$
	$aa + 2ab + bb$
	o o o
Radix	$a + b$
Diviſor	$2a$

per $2a$, & fit $+ b$: quod adſcribo priori radici inventæ a. Hinc ſi ducatur $2a$ in b, fit $+ 2ab$, quod ſublatum ex $2ab$ relinquit o. Similiter ſi multiplicetur b in ſe, fiet $+ bb$; quâ itidem ex $+ bb$ ablatâ, remanebit o. Et operatio erit ad finem perducta, eritque radix quæſita $a + b$. Et ſic de aliis.

Exempla extractionis radicum ex compoſitis.

Quadratum	$a^4 - 2aabb + b^4$
Radix	$aa - bb$
Diviſor	$2aa$

Quadratum	$64xx - 160x + 100$
Radix	$8x - 10$
Diviſor	$16x$

Quadratum $aa + 2ac + cc - 2ab - 2bc + bb$

$aa + 2ac + cc - 2ab - 2bc + bb$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

Radix $a + c - b$

Primus diviſor $2a$

Secundus diviſor $2a + 2c$

Quadratum aa $\quad a + c$

Radix a $\quad$ per 2

$2a + 2c$. ſecundus diviſor.

per 2 $\quad a \quad a$ $\quad -2ab \,|\, -b$ quot. ſecundus.

Primus diviſor $2a$ $\quad aa$ $\quad +2a$

$+2ac \,|\, +c$ quotus primus $\quad 2a + 2c$

$+2a$ $\quad -b$

$-2ab - 2bc$.

$2a \quad c \quad -b$

$+c \quad c \quad -b$

$+2ac \quad cc. \quad +bb$

Cubus $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$

Radix $a + b$ $\quad +3aab \,|\, +b$.

Diviſor $3aa$ $\quad +3aa$

Cub. $27x^6 - 54x^5 + 171x^4 - 188x^3 + 285xx - 150x + 125$ Cub. $27x^6$

$27x^6 - 54x^5 + 36x^4 - 8x^3 + 60xx - 150x + 125$ Rad. $3xx$.

$0 \quad 0 + 135x^4 - 180x^3 + 225xx \quad 0 \quad 0$ $\quad 3xx$

$+135x^4 - 180x^3 + 225xx$ $\quad 3xx$

$0 \quad 0 \quad 0$ $\quad 9x^4$.

Radix $3xx - 2x + 5$. $\quad$ per 3

Primus diviſ. $27x^4$ $\quad -54x^5 \,|\,$ $\quad 27x^4$ 1.div.

Secundus diviſor $27x^4 - 36x^3 + 12xx$ $\quad +27x^4 \,|\, -2x$ quot. primus.

$-2x$

$$\begin{array}{r} +27x^4 \\ -2x \\ \hline -54x^5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -2x \\ -2x \\ \hline +4xx \\ +3xx \\ \hline +12x^4 \\ \text{per } 3 \\ \hline +36x^4. \end{array} \qquad \begin{array}{r} -2x \\ -2x \\ \hline +4xx \\ -2x \\ \hline -8x^3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3xx-2x \\ 3xx-2x \\ \hline -6x^3+4xx \\ 9x-6x^3 \\ \hline 9x^4-12x^3+4xx \\ \text{per } 3 \\ \hline 27x^4-36x^3+12xx. \end{array} \text{Secund.div.}$$

$$\begin{array}{r} +135x^4 \\ +27x^4 \end{array} \Big| +5 \text{ quotus ſecund.} \qquad \begin{array}{r} +5 \\ +5 \\ \hline +25 \\ +3xx-2x \\ \hline +75xx-50x \\ \text{per } 3 \\ \hline +225xx-150x. \end{array} \qquad \begin{array}{r} +5 \\ +5 \\ \hline +25 \\ +5 \\ \hline +125. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +27x^4-36x^3+12xx \\ +5 \\ \hline +135x^4-180x^3+60xx. \end{array}$$

Cæterùm ſi quantitates, ex quibus radix extrahi debet, tales fuerint, ut radix prædicto modo inveniri non poſſit, deſignabitur ipſa præfigendo quantitatibus propoſitis ſignum $\surd$. Vt ad extrahendum radicem quadratam ex aq, ſcribo $\surd aq$; quo indicatur radicem quadratam ex aq eſſe extractam, vel adhuc eſſe extrahendam. Sic & $\surd \overline{aa+bb}$ deſignabit radicem quadratam ex $aa+bb$.

Similiter ad extrahendum radicem cubicam ex aaq, ſcribo $\surd C.aaq$. Vt & $\surd \overline{C.a^3-b^3+abb}$, ad extrahendam radicem cubicam ex a^3-b^3+abb. Quæ quidem radices vocantur quantitates Surdæ ſeu Irrationales, ad modum numerorum ſurdorum ſeu irrationalium, de quibus Arithmetici agunt.

Vbi notandum, ſignum $\surd$, vocari Signum Radicale, atque in genere uſurpari ad denotandam quamcunque radicem, ſive Quadratam, ſive Cubicam, ſive Quadrato-quadratam, &c; ſed ad illam diſtinguendam, communiter ſcribi $\surd$ Q, vel etiam ſimpliciter $\surd$, ad denotandam radicem Quadratam: & $\surd$ C, ad denotandam radicem Cubicam: & $\surd$ QQ ſeu $\surd\surd$, ad denotandam radicem Quadrato-quadratam, &c. quæ radices etiam ſic deſignantur: $\surd$ ②, $\surd$ ③, $\surd$ ④, &c; atque ab aliis, hoc quoque pacto: $\surd$ ȝ, $\surd$ cꝰ, $\surd$ ȝȝ, &c.

DE LOGISTICA FRACTIONVM.

QVandoquidem ex diviſione quantitatum ſimplicium & compoſitarum oſtenſum eſt oriri Fractiones, ſicut in Arithmetica vulgari, quarum operatio eaſdem leges ſequitur atque numerorum fractorum vulgarium; ſatis erit, ſi ſuppoſitis horum regulis, illarum operationem exemplis exponamus.

Hinc, cum per fractionem quamlibet deſignetur ſemper diviſionem aliquam eſſe faciendam, utpote illarum quantitatum, quæ numeratoris vicem gerunt, per quantitates, quæ pro denominatore habentur, facile conſtat, ſi numerator denominatori fuerit æqualis, tunc per fractionem illam deſignari unitatem. Vt $\frac{bb}{bb}$, $\frac{ab+bb}{ab+bb}$, & ſimiles. Vnde patet, quânam ratione unitas denotari poſſit in formam fractionis, cujus denominator ſit is, qui requiritur.

Quòd ſi verò ab, $aa-bb$, &c. in formam fractionis deſignare velimus, oportet tantùm, aſſumpto ab & $aa-bb$, &c. tanquam numeratore fractionis, ſubſcribere pro denominatore unitatem, hoc pacto: $\frac{ab}{1}$ & $\frac{aa-bb}{1}$, &c.

Porrò ſi quantitas aliqua, ut a, deſignanda ſit in formam fractionis, cujus denominator ea ſit, quæ præſcribitur, ut d, aut $a+b$, &c; oportet multiplicato a per d, aut per $a+b$, ſcribere $\frac{ad}{d}$, aut $\frac{aa+ab}{a+b}$, &c.

Non aliter fit, ſi $a+\frac{aa}{d}$ ſit redigendum ad formam unius fractionis. Etenim, multiplicato a per denominatorem d, addatur producto ad numerator aa, & ſummæ $ad+aa$ ſubſcribatur denominator d, habebiturque $\frac{ad+aa}{d}$. Sic &, $\frac{aa}{d}-a$ in formam unius fractionis reductum, facit $\frac{aa-ad}{d}$. Haud ſecus ſi $a+b$ $+\frac{aa+bb}{a-b}$ reducatur ad fractionem, fiet $\frac{2aa}{a-b}$.

Cæterùm notandum hîc, cum ad dividendum aa per bb, ſcribatur $\frac{aa}{bb}$ pro quotiente; ideo ad hunc quotientem ſive fractionem $\frac{aa}{bb}$ multiplicandum per diviſorem ſeu denominatorem bb, pro

pro-

producto ſcribendum eſſe numeratorem aa. Non ſecus ſi $\frac{bb}{a-b}$ multiplicetur per $a-b$, productum erit bb. Vnde patet ad multiplicandum $\frac{a}{2b}$ per $2ab$; quoniam multiplicato $\frac{a}{2b}$ per $2b$, productum eſt a; ſupereſt tantùm ut hoc productum adhuc multiplicetur per a, ut habeatur quæſitum productum aa. Similiter ad multiplicandum $\frac{1}{2}$ per $2ab$: cum multiplicato $\frac{1}{2}$ per 2, fiat 1; hinc multiplicandum tantùm reſtat 1 per ab, & fit productum quæſitum $1ab$ ſeu ab. Et ſic de aliis.

De Reductione fractionum ad ſimpliciores.

IAm ad reducendum fractionem $\frac{aac}{cd}$ ad ſimpliciorem; eliſâ communi literâ c, quæ tam in numeratore quàm in denominatore reperitur, fiet $\frac{aa}{d}$. Sic & ad abbreviandum $\frac{ab^3}{abc}$: eliſis literis a, b, numeratoris atque denominatoris, hoc eſt, diviſo tam ab^3 quàm abc per ab, fiet $\frac{bb}{c}$.

Eodem modo ad abbreviandum $\frac{aac-aad}{cd-dd}$: quoniam diviſo aac per cd, oritur $\frac{aa}{d}$, id quod multiplicatum per $cd-dd$, producit $aac-aad$; hinc $\frac{aac-aad}{cd-dd}$ ad minores terminos reductum, erit $\frac{aa}{d}$.

Pari ratione ad reducendum $\frac{aac-aad-bbc+bbd}{cd-dd}$: quia (ut ſupra) diviſo aac per cd, oritur $\frac{aa}{d}$, id quod multiplicatum per $cd-dd$, producit $aac-aad$; & rurſus $-bbc$ diviſo per cd, oritur $-\frac{bb}{d}$, quod per $cd-dd$ multiplicatum producit $-bbc+bbd$; hinc $\frac{aac-aad-bbc+bbd}{cd-dd}$ abbreviatum, facit $\frac{aa-bb}{d}$.

Sic & $\frac{a^5 ccoomm+4a^6 ccm^3 p}{oopp z^4+4mp^3 z^4}$ abbreviatum, facit $\frac{a^6 ccmm}{ppz^4}$. Pag. 214. lin. 15.

Non ſecus $\frac{aac-aad-acd+add}{cd-dd}$ reducitur ad $\frac{aa}{d}-a$; vel

$\frac{aa - ad}{d}$. Nam $aac - aad$ diviſum per $cd - dd$, facit $\frac{aa}{d}$; & $-acd + add$ diviſum per $cd - dd$, facit $-a$.

Similiter ſi fuerit $\frac{a^3 - abb}{aa + 2ab + bb}$: divido $a^3 - abb$ per $aa + 2ab + bb$, & relinquitur poſt diviſionem $+2abb + 2b^3$ (nullâ hîc quotientis $a - 2b$ habitâ ratione). Deinde divido $aa + 2ab + bb$ per reliquum $+2abb + 2b^3$, & fit quotiens $\frac{a}{2bb} + \frac{1}{2b}$. Hinc cum peracta ſit diviſio, & nihil remaneat, dividendus erit numerator $a^3 - abb$ & denominator $aa + 2ab + bb$ per $2abb + 2b^3$, Invenieturque $\frac{aa}{2bb} - \frac{a}{2b}$, pro numeratore,

& $\frac{a}{2bb} + \frac{1}{2b}$, pro denominatore.

hoc eſt, multiplicando ubique per $2bb$, habebitur $\frac{aa - ab}{a + b}$.

Nec aliter fit ad abbreviandum $\frac{a^3 - b^3}{aa - bb}$. Diviſis enim $a^3 - b^3$ per $aa - bb$, relinquitur $abb - b^3$: dein $aa - bb$ per $abb - b^3$, fit quotiens $\frac{a}{bb} + \frac{1}{b}$, & peracta eſt diviſio abſque reliquo. Quare ſi dividatur $a^3 - b^3$ & $aa - bb$ per $abb - b^3$,

fiet $\frac{aa}{bb} + \frac{a}{b} + 1$, pro numeratore.

& $\frac{a}{bb} + \frac{1}{b}$, pro denominatore.

Ideoque ſi ubique multiplicetur per bb, fiet fractio reducta $\frac{aa + ab + bb}{a + b}$.

Simili operatione reducitur $\frac{a^4 - b^4}{aa + ab}$ ad $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{a}$: Vt & $\frac{x^3 - 25x}{xx + 10x + 25}$ ad $\frac{xx - 5x}{x + 5}$. Et ſic de aliis.

Oſtenſâ igitur ratione, quâ fractiones ad ſimpliciores reduci poſſunt, ſupereſt ut explicemus, quo pacto datis duabus aut pluribus quantitatibus, ſive ſimplicibus, ſive compoſitis, inveniatur minima quantitas, quæ per ipſas ſine reliquo dividi poteſt. id quod in ſequentibus uſum habere patebit. Eſt autem operatio ſimilis ei, quâ ſecundùm prop. 36. lib. 7. Elementorum Euclidis, datis duobus numeris, minimus invenitur numerus, qui per ipſos ſine reliquo dividitur.

Vt,

Vt, ad inveniendum minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per duas datas aac & cd: conſtitutis aac & cd in formam fractionis, hoc pacto: $\frac{aac}{cd}$; reduco fractionem hanc ad ejus primitivam, ſeu ſimpliciorem $\frac{aa}{d}$. Quibus juxta ſe poſitis, hoc modo: $\frac{aac}{cd} \times \frac{aa}{d}$, ſi multiplicatio inſtituatur per crucem, procreabitur eadem quantitas ex aac in d, atque ex cd in aa: fiet enim utrobique $aacd$, minima quippe quantitas, quæ ſine reliquo dividi poteſt per aac & cd.

Sic & ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per duas datas $aac - aad$ & $cd - dd$; reduco (ut ante) fractionem $\frac{aac - aad}{cd - dd}$ ad ejus primitivam $\frac{aa}{d}$: Tum multiplicato $aac - aad$ per d, aut $cd - dd$ per aa, fiet quantitas quæſita $aacd - aadd$. minima ſcilicet, quæ diviſibilis eſt per $aac - aad$ & $cd - dd$.

Similiter ſi dentur $a^4 - b^4$ & $aa + ab$: quoniam $\frac{a^4 - b^4}{aa + ab}$ reducitur ad $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{a}$, & $a^4 - b^4$ multiplicatum per a facit $a^5 - ab^4$; erit $a^5 - ab^4$ quantitas quæſita.

Eâdem ratione ſi datæ fuerint $x^3 - 25x$ & $xx + 10x + 25$, erit quæſita quantitas $x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x$. Et ſic de cæteris.

Quòd ſi verò compertum ſit aut conſtet, duas illas datas quantitates ad ſimpliciores reduci non poſſe, ſed primitivas eſſe; oportet unam per alteram multiplicare, ad inveniendam quantitatem quæſitam. Vt ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per $aa - ab$ & $a + b$: quoniam $\frac{aa - ab}{a + b}$ ad ſimpliciores terminos reduci nequit, multiplico $aa - ab$ per $a + b$, (cum ſecundùm præcedentia ſcribendum foret $\frac{aa - ab}{a + b} \times \frac{aa - ab}{a + b}$), & fit quæſita quantitas $a^3 - abb$.

Cæterùm datis tribus aut pluribus quantitatibus, invenietur minima quantitas quæ per ipſas abſque reliquo dividi poteſt, hoc modo: Vt ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per $a^3 - abb$, $aa + 2ab + bb$, & $aa - bb$: quæro primùm, ut ante, minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per

$a^3 -$

$a^3 - abb$ & $aa + 2ab + bb$, & fit $a^4 + a^3b - aabb - ab^3$. quæ cum & dividatur per $aa - bb$, manifeſtum eſt $a^4 + a^3b - aabb - ab^3$ eſſe quantitatem quæſitam. Sic & ſi datæ fuerint $a^4 - b^4$, $aa + ab$, $a^4 + ab^3$, & $a + b$: inventâ primùm minimâ quantitate $a^5 - ab^4$, quæ dividi poteſt per duas $a^4 - b^4$ & $aa + ab$, (ut ante), quoniàm ipſa dividi nequit per tertiam $a^4 + ab^3$: hinc ad $a^5 - ab^4$ & $a^4 + ab^3$ ſimiliter aliam quæro, ut $a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6$. quæ cum hîc etiam diviſibilis ſit per reliquam $a + b$, patet $a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6$ eſſe quantitatem quæſitam. Et ſic de cæteris.

De Reductione fractionum ad eandem denominationem.

QVibus explicatis, facile eſt oſtendere, quâ ratione fractiones diverſæ denominationis reducantur ad fractiones ejuſdem denominationis. Vt ad reducendum fractiones $\frac{b^3d}{aac}$ & $\frac{a^3}{cd}$ ad eandem denominationem: quæro primùm minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per denominatores aac & cd (ut jam eſt oſtenſum), & fit $aacd$: quæ erit denominator communis. Iam ad inveniendum numeratores, dividatur denominator inventus $aacd$ per aac & cd, unumquemque ſcilicet ex denominatoribus datis, & quotientis d & aa multiplicentur per numeratores b^3d & a^3 datarum fractionum, ut habeantur numeratores quæſiti b^3dd & a^5, fiuntque fractiones quæſitæ $\frac{b^3dd}{aacd}$ & $\frac{a^5}{aacd}$.

Similiter ad reducendum $\frac{b^4}{aac - aad}$ & $\frac{a^3 + b^3}{cd - dd}$ ad eandem denominationem: invento denominatore communi $aacd - aadd$, minimâ nempe quantitate, quæ dividi poteſt per $aac - aad$ & $cd - dd$, divido $aacd - aadd$ per $aac - aad$ & $cd - dd$, & quotientes d & aa multiplico per numeratores b^4 & $a^3 + b^3$, fiuntque fractiones quæſitæ $\frac{b^4d}{aacd - aadd}$ & $\frac{a^5 + aab^3}{aacd - aadd}$.

Eodem modo ſi $\frac{125}{x^3 - 25x}$ & $\frac{x - 25}{xx + 10x + 25}$ reducantur ad eandem denominationem, provenient $\frac{125x + 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$ & $\frac{x^3 - 30xx + 125x}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Non

Non ſecus $\frac{a^5}{a^4 - b^4}$, $\frac{a^3 - aab}{aa + ab}$, $\frac{a^5 - b^5}{a^4 + ab^3}$, & $\frac{aa + ab + bb}{a + b}$ reductæ ſub eodem denominatorē, facient

$$\frac{a^8 - a^7b + a^6bb}{a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^5},$$

$$\frac{a^8 - 3a^7b + 5a^7bb - 6a^5b^3 + 5a^4b^4 - 3a^3b^5 + aab^6}{a^6 - a^5b + \bullet\, bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^5},$$

$$\frac{a^8 - a^7b + a^6bb - a^5b^3 - a^3b^5 + aab^5 - ab^7 + b^8}{a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6}, \&$$

$$\frac{a^8 - a^7b + 2a^6bb - 2a^5b^3 + 2a^4b^4 - 2a^3b^5 + aab^5 - ab^7}{a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^5}.$$

De Additione & Subtractione fractionum.

ADditio & Subtractio fractionum eodem modo perſiciuntur, atque additio & ſubtractio numerorum fractorum vulgarium. Etenim ſi fractiones ejuſdem fuerint denominationis, oportet tantùm earum numeratores addere aut ſubtrahere, & ſummæ vel reliquo ſubſcribere denominatorem communem. Vt ad addendum $\frac{aa}{c}$ ad $\frac{bb}{c}$, ſumma erit $\frac{aa+bb}{c}$. Sic & $\frac{2ad}{d+e}$ additum ad $\frac{2ae}{d+e}$, facit $\frac{2ad+2ae}{d+e}$, ſeu $2a$. Non ſecus ſi addantur $\frac{bd}{b+d}$, $d + \frac{bb}{b+d}$, & $a - \frac{dd}{b+d}$, erit ſumma $a + \frac{2bd+bb}{b+d}$.

Quod ſi fractiones diverſæ denominationis fuerint, reducendæ erunt priùs ad eandem denominationem: quo facto, operandum erit ut jam dictum eſt. Vt ad addendum $\frac{125}{x^3 - 25x}$ ad $\frac{x - 25}{xx + 10x + 25}$, fiet ſumma $\frac{x^3 - 30xx + 250x + 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Non ſecus ſi addantur $\frac{a^5}{a^4 - b^4}$, $\frac{a^3 - aab}{aa + ab}$, $\frac{a^5 - b^5}{a^4 + ab^3}$, & $\frac{aa + ab + bb}{a + b}$, erit ſumma $\frac{4a^8 - 6a^7b + 9a^5bb - 9a^5b^3 + 7a^4b^4 - 6a^3b^5 + 3aab^5 - 2ab^7 + b^8}{a^7 - a^5b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6}$,

Iam ad ſubtrahendum $\frac{aa}{c}$ de $\frac{bb}{c}$, ſcribo pro differentia $\frac{bb - aa}{c}$. Eodem modo ſubductis $\frac{2ae}{d-e}$ à $\frac{2ad}{d-e}$, reliquum erit $\frac{2ad - 2ae}{d-e}$ ſeu $2a$ Similiter $\frac{bd}{b+d}$ de $d + \frac{bd}{b+d}$ relinquit $\frac{dd+bb}{b+d}$.

Nec aliter fit, ſi ſubtrahendum ſit $\frac{b^4}{aac - aad}$ de $\frac{a^3 + b^3}{cd - dd}$. Etenim

nim reductis ad eundem denominatorem, ſi auferatur $\frac{b^4 d}{aacd - aadd}$ de $\frac{a^5 + aab^3}{aacd - aadd}$ relinquetur $\frac{a^5 + aab^3 - b^4 d}{aacd - aadd}$. Sic & ſi tollatur $\frac{125}{x^3 - 25x}$ ex $\frac{x - 25}{xx + 10x + 25}$, remanebit $\frac{x^3 - 30xx - 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Eâdem ratione ad ſubducendum $\frac{aa - ab}{a + b}$ de a, reductâ quantitate a ad denominatorem $a + b$, demptoque $\frac{aa - ab}{a + b}$ de $\frac{aa + ab}{a + b}$, fiet reliquum $\frac{2ab}{a + b}$. Non ſecus ſi ſubtrahatur $b + \frac{cc}{b + d}$ de $a + b$, relinquetur $a - \frac{cc}{b + d}$.

De Multiplicatione fractionum.

AD multiplicandum $\frac{ab}{c}$ per $\frac{de}{f}$, multiplico numeratorem ab per numeratorem de, ut & denominatorem c per denominatorem f (ad modum fractionum vulgarium), fitque productum $\frac{abde}{cf}$. Sic & $\frac{aa - bb}{c}$ multiplicatum per $\frac{2ab}{b + c}$ producit $\frac{2a^3 b - 2ab^3}{bc + cc}$.

Ad faciliorem autem operationem non rarò convenit abbreviare quantitates per crucem. Vt ad multiplicandum $\frac{aac - aad - bbc + bbd}{aa + 2ab + bb}$ per $\frac{a^3 - abb}{cd - dd}$: quoniam $aac - aad - bbc + bbd$ & $cd - dd$ reducuntur ad ſimpliciores $aa - bb$ & d, ut & $a^3 - abb$ & $aa + 2ab + bb$ ad $aa - ab$ & $a + b$; hinc loco multiplicandi $aac - aad - bbc + bbd$ per $a^3 - abb$ multiplico $aa - bb$ per $aa - ab$; & loco multiplicandi $aa + 2ab + bb$ per $cd - dd$ multiplico $a + b$ per d: eritque productum $\frac{a^4 - a^3 b - aabb + ab^3}{ad + bd}$.

Porrò ad multiplicandum $aa - bb$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$: ſubſtituto 1 pro denominatore ipſius $aa - bb$, quoniam numerator $aa - bb$ & denominator $a + b$ reduci poſſunt ad $a - b$ & 1, hinc multiplicatis numeratoribus inter ſe, ut & denominatoribus, fiet productum $\frac{a^3 - 2aab + abb}{1}$ ſeu $a^3 - 2aab + abb$.

Eâdem ratione cùm multiplicatur $a + \frac{bb}{a - b}$ per $a - 2b + \frac{bb}{a}$, hoc eſt, $\frac{aa - ab + bb}{a - b}$ per $\frac{aa - 2ab + bb}{a}$: quoniam $aa - 2ab + bb$

& $a -$

& $a - b$ reduci poſſunt ad $a - b$ & 1; hinc multiplicatis $aa - ab + bb$ per $a - b$, & a per 1, provenit $\frac{a^3 - 2aab + 2abb - b^3}{a}$ ſeu $aa - 2ab + 2bb - \frac{b^3}{a}$.

Similiter ſi ad multiplicandum proponatur $\frac{xx - 5x}{x + 5}$ per $\frac{xx - 25}{x}$: reductis $xx - 5x$ & x ad $x - 5$ & 1, itemque $xx - 25$ & $x + 5$ ad $x - 5$ & 1, multiplico tantùm $x - 5$ per $x - 5$, & fit productum $xx - 10x + 25$.

Præterea ad multiplicandum $a + \frac{bb}{a - b}$ per $a - b$: quoniam a per $a - b$ facit $aa - ab$, & $\frac{bb}{a - b}$ per $a - b$ facit bb; hinc productum quæſitum erit $aa - ab + bb$. Quâ quoque ratione multiplicabitur $\frac{aa - ab}{a + b}$ per $aa - bb$, & producetur $a^3 - 2aab + abb$. cum enim $aa - bb$ fiat ex $a + b$ in $a - b$, & $\frac{aa - ab}{a + b}$ multiplicatum per $a + b$ producat $aa - ab$, ſupereſt tantùm multiplicandum $aa - ab$ per $a - b$, ut habeatur $a^3 - 2aab + abb$.

Denique ſi multiplicandum ſit $\frac{a^3 - abb}{cd - dd}$ per $c - d$, fiet, diviſis $cd - dd$ per $c - d$, productum $\frac{a^3 - abb}{d}$.

De Diviſione fractionum.

AD dividendum $\frac{ab^3}{c}$ per $\frac{bb}{c}$: omiſſo communi denominatore c, divido ab^3 per bb, fietque quotiens ab. Pari ratione ſi $\frac{a^3 - abb}{c - d}$ dividatur per $\frac{aa + 2ab + bb}{c - d}$, orietur $\frac{a^3 - abb}{aa + 2ab + bb}$ ſeu $\frac{aa - ab}{a + b}$.

Quòd ſi denominatores fuerint diverſi, reductio ad eandem denominationem fiet, ſi multiplicatio inſtituatur per crucem, ut in vulgaribus. Vt ad dividendum $\frac{a^3 - b^3}{a + b}$ per $\frac{aa - ab + bb}{c}$: quoniam multiplicato prioris numeratore $a^3 - b^3$ per poſterioris denominatorem c, & hujus numeratore $aa - ab + bb$ per illius denominatorem $a + b$, fiunt $a^3c - b^3c$ & $a^3 + b^3$; hinc quotiens erit $\frac{a^3c - b^3c}{a^3 + b^3}$.

Advertendum autem hîc eſt, ad facilitatem operationis, fractionum numeratores, ſicut etiam denominatores non rarò ad ſimpliciores terminos reduci poſſe. Vt ad dividendum $\frac{a^4 - b^4}{aa - 2ab + bb}$ per $\frac{aa + ab}{a - b}$: cum numeratores $a^4 - b^4$ & $aa + ab$ reduci poſſint ad $a^3 - aab + abb - b^3$ & a, & denominatores $aa - 2ab + bb$ & $a - b$ ad $a - b$ & 1; ideo loco multiplicandi $a^4 - b^4$ per $a - b$, multiplico $a^3 - aab + abb - b^3$ per 1, & fit $a^3 - aab + abb - b^3$; & loco multiplicandi $aa + ab$ per $aa - 2ab + bb$ multiplico a per $a - b$, & fit $aa - ab$. unde quotiens diviſionis fit $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{aa - ab}$ vel $a + \frac{bb}{a}$. Eâdem ratione ſi $\frac{x^4 - 625}{xx - 10x + 25}$ dividatur per $\frac{xx + 5x}{x - 5}$, orietur $\frac{x^3 - 5xx + 25x - 125}{xx - 5x}$. Nam $x^4 - 625$ & $xx + 5x$ reduci poſſunt ad $x^3 - 5xx + 25x - 125$ & x, quin & $xx - 10x + 25$ & $x - 5$ ad $x - 5$ & 1, unde producta ex multiplicatione per crucem fiunt $x^3 - 5xx + 25x - 125$ & $xx - 5x$.

Porrò ad dividendum $a^3 - 2aab + abb$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$: ſubſtituto 1 pro denominatore dividendi $a^3 - 2aab + abb$, quoniam numeratores $a^3 - 2aab + abb$ & $aa - ab$ reduci poſſunt ad $a - b$ & 1; hinc multiplicatis $a - b$ per $a + b$ & 1 per 1, fiet quotiens $aa - bb$.

Sic & ad dividendum $aa + \frac{3abb}{a + 4b}$ per $a + b$, hoc eſt, $\frac{a^3 + 4aab + 3abb}{a + 4b}$ per $\frac{a + b}{1}$: divido $a^3 + 4aab + 3abb$ per $a + b$, & fit $aa + 3ab$, unde quotiens quæſitus fit $\frac{aa + 3ab}{a + 4b}$. Haud aliter, ſi dividatur $aa - ab$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$, orietur $a + b$. Et $\frac{xx + 5x}{x - 5}$ per $xx + 5x$, orietur $\frac{1}{x - 5}$. Ac $a^3 - aab$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$, orietur $aa + ab$. Et denique $\frac{xx + 5x}{x - 5}$ per $x + 5$, exſurget $\frac{x}{x - 5}$.

De Radicum extractione ex fractionibus.

CVm in Radicum extractione ex fractionibus radix ex numeratore & denominatore extracta exhibeat radicem quæſitam: hinc ſi extrahenda ſit radix quadrata ex $\frac{aabb}{cc}$, quoniam radix

dix quadrata ex $aabb$ eſt ab, & radix quadrata ex cc eſt c, ſcribo pro radice quæſita $+\frac{ab}{c}$.

Eodem modo, ſi extrahatur radix quadrata ex $\frac{a^4-2aabb+b^4}{aa+4ab+4bb}$, fiet $\frac{aa-bb}{a+2b}$. Pari ratione ad extrahendam radicem quadratam ex $4+\frac{64xx-160x}{25}$: quoniam $4+\frac{64xx-160x}{25}$ in formam fractionis facit $\frac{100-160x+64xx}{25}$, & radix quadrata ex $100-160x+64xx$ eſt $10-8x$, & radix quadrata ex 25 eſt 5; erit radix quæſita $\frac{10-8x}{5}$ ſeu $2-\frac{8x}{5}$.

Non ſecus radix cubica ex $\frac{27x^6-54x^5+171x^4-188x^3+285xx-150x+125}{x^3-9xx+27x-27}$ erit $\frac{3xx-2x+5}{x-3}$.

Quòd ſi quæſita radix prædicto modo ex numeratore atque denominatore extrahi nequit, præponitur datæ fractioni ſignum radicale $\surd$. Vt ad extrahendam radicem quadratam ex $\frac{ccxx}{4bb}-ac$, ſcribo $\sqrt{\frac{ccxx}{4bb}-ac}$; vel quia $\frac{ccxx}{4bb}-ac$ in formam fractionis facit $\frac{ccxx-4abbc}{4bb}$, & ex denominatore $4bb$ extrahi poteſt radix, quæ eſt $2b$: ideo quæſita radix ſic quoque ſcribi poterit $\frac{\sqrt{ccxx-4abbc}}{2b}$. Similiter radix quadrata ex $\frac{aabb}{aa+bb}$, erit $\frac{ab}{\sqrt{aa+bb}}$. Idem de reliquis radicibus eſt intelligendum.

DE LOGISTICA QVANTITATVM SVRDARVM.

QVemadmodum fractiones oriuntur ex diviſione imperfecta quantitatum, quarum una per alteram ſine reliquo dividi nequit: ita ex extractione radicis quantitatum radicem non habentium exſurgunt quantitates Surdæ, quarum operationem ſequentibus exemplis exponere viſum fuit.

De Reductione quantitatum ſurdarum.

SCiendum itaque, quòd, ſicut ad operationem fractionum diverſæ denominationis oportet priùs ipſas ad eundem denomi-

natorem reducere, ita & opus ſit, quantitates ſurdas, ſi diverſa ſigna radicalia habuerint, reducere ad idem ſignum radicale. Quod fit, ſi ad numeros, à quibus radices denominantur, minimus inveniatur numerus, qui per ipſos ſine reliquo dividi poſſit. Vt ad reducendum $\sqrt{aq}$ ſeu $\sqrt{②}\, aq$ & $\sqrt{C.aaq}$ ſeu $\sqrt{③}\, aaq$ ad idem ſignum radicale: quæro ad 2 & 3 (numeros à quibus $\sqrt{Q}$ & $\sqrt{C}$ denominantur), minimum numerum, qui per ipſos ſine reliquo dividi poteſt; qui eſt 6. Iam cum 6 diviſo per 2 oriatur 3, & per 3 diviſo oriatur 2; hinc aq multiplicandum erit in ſe cubicè, & aaq quadratè; fientque ſub eodem ſigno $\sqrt{QC.a^3q^3}$ ſeu $\sqrt{⑥}\, a^3q^3$, & $\sqrt{QC.a^4qq}$ ſeu $\sqrt{⑥}\, a^4qq$. Sic & $\sqrt{ab}$ & $\sqrt{\sqrt{a^3b+ab^3}}$ ſub eodem ſigno radicali erunt $\sqrt{\sqrt{aabb}}$ & $\sqrt{\sqrt{a^3b+ab^3}}$.

Huc refer cùm quantitas aliqua rationalis per multiplicationem in ſe reducitur ad aliquod ſignum radicale. Exempli gratiâ: ad reducendum $a+b$ ad idem ſignum radicis cum $\sqrt{aa+bb}$ oportet multiplicare $a+b$ in ſe quadratè, & fit $\sqrt{aa+2ab+bb}$. Non ſecus ſi multiplicetur $a+b$ in ſe cubicè, fiet $\sqrt{C.a^3+3aab+3abb+b^3}$ ſub eodem ſigno cum $\sqrt{C.a^3-b^3+abb}$. Et ſic de aliis.

Deinde ſciendum, quantitates ſurdas non rarò ad ſimpliciores reduci poſſe, tollendo ex ſigno radicali quicquid eſt rationale: nimirum, dividendo quantitates ſub eodem ſigno $\sqrt{}$ comprehenſas per aliquod Quadratum, vel Cubum, &c. per quod multiplicatione fuerint productæ. Vt $\sqrt{75\,aa}$ reduci poteſt ad $5a\sqrt{3}$: nam $75\,aa$ producitur ex multiplicatione $25\,aa$ per 3, quarum radices ſunt $5a$ & $\sqrt{3}$; adeò ut, ſi $75\,aa$ dividatur per quadratum $25\,aa$, ſub ſigno radicali tantùm ſcribendum ſit 3, hoc modo: $5a\sqrt{3}$. Id quod monſtrat $5a$, hoc eſt, $\sqrt{25\,aa}$, multiplicatum eſſe per $\sqrt{3}$.

Eodem modo cum $a^3b+aabb$ dividi poſſit per quadratum aa, & oriatur $ab+bb$; fit ut pro $\sqrt{a^3b+aabb}$ ſcribi queat $a\sqrt{ab+bb}$.

Similiter quoniam $a^3b-4abb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$ dividi poteſt per quadratum $aa+2ac+cc-2ab-2bc+bb$, cujus radix eſt $a+c-b$, & quotiens eſt $ab+bb$; hinc

hinc loco $\sqrt{a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4}$ ſcribi poteſt $\overline{a + c - b}\sqrt{ab + bb}$.

Non ſecus pro $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$ ſcribi poterit $\frac{am}{pz}\sqrt{oo + 4mp}$: *Pag. 31. lin. 9.* reducto enim ultimo termino ad eandem denominationem cum priori, poteſt utriuſque numerator dividi per $aamm$, cujus radix eſt am, oriturque $oo + 4mp$. Denominator autem cum ſit rationalis, liberabitur à ſigno $\sqrt{}$, extrahendo radicem ex $ppzz$.

Eâdem ratione loco

$$\sqrt{C.\; x^6 - 9x^5 + 27x^4 - 15x^3 - 108xx + 324x - 324}$$

ſcribi poteſt $\overline{x - 3}\sqrt{C.\; x^3 + 12}$. Et ſic de aliis.

Verùm enimverò quoniam ſæpenumero difficile eſt invenire Quadratum, Cubum, &c. per quod diviſio, ad hanc reductionem neceſſaria, inſtitui poſſit; non inutile fuerit, ſi hoc loco oſtendamus, quâ ratione datarum quarumlibet quantitatum diviſores omnes inveniantur, perinde atque in numeris eſt oſtenſum. vide p. 300.

Dividantur datæ quantitates per quantitatem aliquam primitivam (hoc eſt, quæ non niſi per unitatem aut ſe ipſam dividi poteſt), & rurſus quotiens per hanc eandem ſive aliam primitivam, idque fiat donec perveniatur ad quantitatem aliquam primitivam, quæ per ſe ipſam eſt dividenda. Vt ad inveniendum diviſores omnes quantitatis $a^3b + aabb$: divido $a^3b + aabb$ per a, & fit $aab + abb$, id quod rurſus per a diviſum dat $ab + bb$. Iam quia quotiens hîc per a ampliùs dividi nequit, divido $ab + bb$ per b, & provenit $a + b$, quæ quantitas eſt primitiva, ideoque per ſe ipſam dividenda. Quibus peractis reſerventur diviſores $a, a, b,$ & $a + b$. *Ratio inveniendi diviſores omnes quarumcunque datarum quantitatum.*

$a^3b + aabb$	$aab + abb$	$ab + bb$	$a + b$	1
a	a	b	$a + b$	

Iam ut ex hiſce diviſoribus inveniantur diviſores omnes quantitatis $a^3b + aabb$, multiplico primùm a per a, & fit aa. Deinde b per 1, a, & aa, fiuntque $b, ab,$ & aab. Denique multiplico $a + b$ per 1, $a, aa, b, ab,$ & aab, & fiunt $a + b, aa + ab, a^3 + aab, ab + bb, aab + abb,$ & $a^3b + aabb$.

$$\begin{array}{c} 1. \\ \hline a. \quad a. \\ \hline aa. \\ \hline b. \quad ab. \quad aab. \\ \hline a+b.\ aa+ab.\ a^3+aab.\ ab+bb.\ aab+abb.\ a^3b+aabb. \end{array}$$

Atque ita diviſores omnes erunt 1, a, aa, b, ab, aab, $a+b$, $aa+ab$, a^3+aab, $ab+bb$, $aab+abb$, & $a^3b+aabb$.

Sic & ad inveniendum omnes diviſores quantitatis $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$: divido $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$ per quantitatem primitivam $aa+bb$, & fit $a^4-3aabb+b^4$, id quod rurſus diviſum per quantitatem primitivam $aa+ab-bb$ dat $aa-ab-bb$, quæ quantitas etiam primitiva eſt, adeoque per ſe ipſam dividenda. Eruntque diviſores reſervandi $aa+bb$, $aa+ab-bb$, & $aa-ab-bb$.

$$\begin{array}{r|r|r|l} a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6 & a^4-3aabb+b^4 & aa-ab-bb & 1 \\ aa+bb & aa+ab-bb & aa-ab-bb & \end{array}$$

Ex quibus ut inveniantur diviſores omnes quantitatis $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$: multiplico primùm $aa+bb$ per $aa+ab-bb$, & fit $a^4+a^3b+ab^3-b^4$. Deinde 1, $aa+bb$, $aa+ab-bb$, & $a^4+a^3b+ab^3$ per $aa-ab-ab-bb$, fiuntque $aa-ab-bb$, $a^4-a^3b-ab^3-b^4$, $a^4-3aabb+b^4$, & $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$.

$$\begin{array}{c} 1. \\ \hline aa+bb. \quad aa+ab-bb. \\ \hline a^4+a^3b+ab^3-b^4. \\ \hline aa-ab-bb.\ a^4-a^3b-ab^3-b^4.\ a^4-3aabb+b^4.\ a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6. \end{array}$$

Ita ut diviſores omnes ſint 1, $aa+bb$, $aa+ab-bb$, $a^4+a^3b+ab^3-b^4$, $aa-ab-bb$, $a^4a^3b-ab^3-b^4$, $a^4-3aabb+b^4$, & $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$.

Pag. 78, lin. 12. Eodem modo ut inveniantur diviſores omnes quantitatis $a^6+2a^4cc+aac^4$: divido $a^6+2a^4cc+aac^4$ per a, & fit $a^5+2a^3cc+ac^4$, quod rurſus per a diviſum, dat $a^4+2aacc+c^4$. Iam cum hic quotiens dividi ampliùs non poſſit per a aut c ſimilemve quantitatem, divido $a^4+2aacc+c^4$ per $aa+cc$, vel, quod hîc idem eſt, ex $a^4+2aacc+c^4$ extraho radicem quadratam

dratam $aa+cc$, quâ denuo per ſeipſam diviſâ, provenit 1. Vnde cum diviſores reſervati ſint a, a, $aa+cc$, & $aa+cc$; ideo ut ex iis inveniantur diviſores omnes quantitatis $a^6+2a^4cc+aac^4$: multiplico primùm a per a, & fit aa: deinde 1, a, & aa per $aa+cc$, fiuntque $aa+cc$, a^3+acc, & a^4+aacc: ac denique $aa+cc$, a^3+acc, & a^4+aacc per $aa+cc$, & fiunt $a^4+2aacc+c^4$, $a^5+2a^3cc+ac^4$; & $a^6+2a^4cc+aac^4$; eruntque diviſores omnes 1, a, aa, $aa+cc$, a^3+acc, a^4+aacc, $a^4+2aacc+c^4$, $a^5+2a^3cc+ac^4$, & $a^6+2a^4cc+aac^4$.

$a^6+2a^4cc+aac^4$	$a^5+2a^3cc+ac^4$	$a^4+2aacc+c^4$	$aa+cc$	1
a	a	$aa+cc$	$aa+cc$	

1.

a. a.

aa.

$aa+cc.\ a^3+acc.\ a^4+aacc.$

$aa+cc.\ a^4+2aacc+c^4.\ a^5+2a^3cc+ac^4.\ a^6+2a^4cc+aac^4.$

Similiter ad inveniendum diviſores omnes quantitatis $a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$: quia, factâ diviſione per b, oritur $a^3-aab+2aac+acc-abb+bcc-2bbc+b^3$, & hujus quotientis per $a+b$, oritur $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$, & radix quadrata ex $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$ eſt $a+c-b$, hoc eſt, $aa-2ab-2ac-2bc+cc+bb$ diviſum per $a+c-b$, dat $a+c-b$; divido demum $a+c-b$ per $a+c-b$, & fit 1. Vnde cum diviſores reſervati ſint b, $a+b$, $a+c-b$, & $a+c-b$; multiplico b per $a+b$, & fit $ab+bb$: tum 1, b, $a+b$, & $ab+bb$ per $a+c-b$, fiuntque $a+c-b$, $ab+bc-bb$, $aa+ac+bc-bb$, & $aab+abc+bbc-b^3$: ac denique $a+c-b$, $ab+bc-bb$, $aa+ac+bc-bb$, & $aab+abc+bbc-b^3$ per $a+c-b$, fiuntque $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$, $aab+2abc+bcc-2abb-2bbc+b^3$, $a^3+2aac+acc-aab-abb+bcc-2bbc+b^3$, & $a^3b+aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$. Atque ita diviſores omnes erunt 1, b, $a+b$, $ab+bb$, $a+c-b$, $ab+bc-bb$, $aa+ac+bc-bb$, $aab+abc+bbc-b^3$, $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$, $aab+2abc+bcc-2abb-2bbc+b^3$, $a^3+2aac+acc$

$+acc-aab-abb+bcc-2bbc+b^3$, & $a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$.

Non ſecus ſi proponatur a^3bc-ab^3c, invenientur ex diviſoribus reſervatis $a, b, c, a-b$, & $a+b$ diviſores ſequentes: 1, $a, b, ab, c, ac, bc, abc, a-b, aa-ab, ab-bb, aab-abb, ac+bc, aac-abc, abc-bbc, aabc-abbc, a+b, aa+ab, ab+bb, aab+abb, ac+bc, aac+abc, abc+bbc, aabc+abbc, aa-bb, a^3-abb, aab-b^3, a^3b-ab^3, aac-bbc, a^3c-abbc, aabc-b^3c$, & a^3bc-ab^3c.

Neque prætereundum hoc loco videtur, quo pacto horum diviſorum ope duæ pluresve quantitates datæ aliâ ratione, quam ex ſuperioribus facilè fuit colligere, ad ſimpliciſſimos terminos reduci queant. Vt ad reducendum $a^3-abb, aab-b^3$, & $a^3+aab-abb-b^3$ ad terminos ſimpliciſſimos, eandem cum ipſis rationem habentes; quæro primo (ut ante) omnes cujuſque quantitatis datæ diviſores: eruntque ipſius a^3-abb diviſores 1, $a, a-b, aa-ab, a+b, aa+ab, aa-bb$, & a^3-abb: ipſius autem $aab-b^3$ diviſores erunt 1, $b, a-b, ab-bb, a+b, ab+bb, aa-bb$, & $aab-b^3$: at verò ipſius $a^3+aab-abb-b^3$ diviſores erunt 1, $a-b, a+b, aa-bb, aa+2ab+bb$, & $a^3+aab-abb-b^3$. Iam cum inter ipſos tres ſint, qui ſibi invicem reſpondeant, ut $a-b, a+b$, & $aa-bb$, quorum ope datæ quantitates ad ſimpliciores reduci poſſunt; hinc ad inveniendum terminos ſimpliciſſimos, divido $a^3-abb, aab-b^3$, & $a^3+aab-abb-b^3$ per $aa-bb$ (utpote diviſorem pluribus dimenſionibus conſtantem), fiuntque a, b, & $a+b$. Vbi notandum, quantitates propoſitas fore inter ſe primas, ſi nulli ex diviſoribus ſibi mutuò reſpondeant.

Quæ ratio inveniendi diviſores non ineptè quoque adhiberi poteſt ad fractionum abbreviationem. Vt ad abbreviandum $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$: quia tam numerator quàm denominator dividi poteſt per $a+b$, poterit pro $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$ ſcribi $\frac{aa-ab}{a+b}$. Et ſic de cæteris.

Vide ſupra pag. 22.

Inventis autem omnibus diviſoribus, videndum eſt num aliqui ex ipſis ſint quadrati, vel cubi, &c. qui ſi reperiantur, adhiberi poterunt ad prædictum modum liberandi quantitates ex ſigno radicali.

dicali. Vt quia inter diviſores quantitatis $a^3b+aabb$ reperitur quadratum aa, poterit $\sqrt{a^3b+aabb}$, dividendo per aa, reduci ad $a\sqrt{ab+bb}$.

Sic & cum $a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$ pro diviſore habeat quoque quadratum $aa+2ac+cc-2ab-2bc+bb$, poterit pro $\sqrt{a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4}$ ſcribi $\overline{a+c-b}\sqrt{ab+bb}$. Similiter cum numerus 75 inter diviſores quoque habeat quadratum numerum 25, reduci poterit $\sqrt{75aa}$ ad $5a\sqrt{3}$. Ita &, quia 1200 dividi poteſt per numeros quadratos 4, 16, 25, 100, & 400; poterit pro $\sqrt{1200aabb}$ ſcribi $2ab\sqrt{300}$ vel $4ab\sqrt{75}$, vel $5ab\sqrt{48}$, vel $10ab\sqrt{12}$, vel denique $20ab\sqrt{3}$.

Quòd ſi inter diviſores præter unitatem quadratum nullum aut cubus &c. reperiatur, non poterit data quantitas præcedenti modo reduci, niſi velis eam in formam fractionis deſignare. Vt quia 10 præter unitatem quadratum nullum inter diviſores admittit, poterit $\sqrt{10aa}$, dividendo 10 per aliquod quadratum, ut lubet, ut 4, 25, 100, &c. denotari hoc pacto: $2a\sqrt{\frac{5}{2}}$, vel $5a\sqrt{\frac{2}{5}}$, vel $10a\sqrt{\frac{1}{10}}$, &c.

Sciendum denique, quòd, licèt hæ quantitates omnes per ſe conſideratæ ſurdæ exiſtant, tamen inter ſe collatæ duorum ſint generum: aliæ enim dicuntur Commenſurabiles ſeu Communicantes; aliæ verò Incommenſurabiles ſeu non Communicantes.

Communicantes ſunt, quæ affinitatem habentes cum quantitatibus rationalibus, aut etiam numeris, inter ſe ſunt ut quantitas rationalis ad quantitatem rationalem, ſeu ſicut numerus ad numerum.

Non Communicantes verò ſunt, quarum unius ad alteram relatio non eſt ut quantitatis rationalis ad quantitatem rationalem, aut numeri ad numerum.

Ratio autem dignoſcendi communicantes à non communicantibus eſt, ſi, poſtquam ad ſimpliciſſimos terminos ſunt reductæ, reperiantur inter ſe eſſe ut quantitas rationalis ad quantitatem rationalem, aut numerus ad numerum. Vt $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$ ſunt communicantes, quia diviſione per $\sqrt{3}$, maximum earum com-

munem diviſorem, reducuntur ad $\sqrt{25aa}$ & $\sqrt{9aa}$, hoc eſt, ad $5a$ & $3a$: adeò ut pro $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$ ſcribi poſſit $5a\sqrt{3}$ & $3a\sqrt{3}$, quæ inter ſe ſunt ut $5a$ ad $3a$, vel 5 ad 3.

Eodem modo communicantes erunt $\sqrt{a^4+aabb}$ & $\sqrt{aabb+b^4}$, quia utrâque divisâ per $aa+bb$, oriuntur $\sqrt{aa}$ & $\sqrt{bb}$, ſeu a & b: ideoque reducuntur ad $a\sqrt{aa+bb}$ & $b\sqrt{aa+bb}$, quæ inter ſe ſunt ut a ad b.

Pag. 31. Similiter communicantes ſunt $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$ & $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$: quippe reducuntur ad $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$ & $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$, quarum unius ad alteram ratio eſt, ut $\frac{z}{a}$ ad $\frac{am}{pz}$, ſeu pzz ad aam.

Haud aliter communicantes erunt $\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$ & $\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$: reductæ enim ad $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$ & $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$, habent inter ſe eam rationem, quæ eſt ipſius $x+3$ ad $5-x$. Et ſic de aliis.

De Additione & Subtractione quantitatum ſurdarum.

AD addendum vel ſubtrahendum quantitates ſurdas, oportet primùm explorare utrum ſint communicantes nec ne: ſi enim communicantes fuerint, adduntur tantùm vel ſubtrahuntur quantitates vel numeri, qui extra ſignum radicale reperiuntur. Vt ad addendum $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$, hoc eſt, $5a\sqrt{3}$ & $3a\sqrt{3}$, ſcribo, additis $5a$ & $3a$, pro ſumma $8a\sqrt{3}$; & $2a\sqrt{3}$, pro earundem differentia, utpote ſublatis $3a$ ex $5a$.

Eodem modo ſi fuerint $\sqrt{a^4+aabb}$ & $\sqrt{aabb+b^4}$, hoc eſt, $a\sqrt{aa+bb}$ & $b\sqrt{aa+bb}$: addendo & ſubtrahendo a & b, erit ſumma $\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$, & differentia $\overline{a-b}\sqrt{aa+bb}$. Similiter ſi proponatur $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$ & $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$, hoc eſt, $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$ & $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$, erit ſumma $\frac{pzz+aam}{apz}\sqrt{oo+4mp}$,

& dif-

& differentia $\frac{pzz - aam}{apz}\sqrt{oo+4mp}$. Nec aliter fit ſi habeatur $\sqrt{\frac{4aabb-4aaxx}{bb}}$ vel $\frac{2a}{b}\sqrt{bb-xx}$ & $\sqrt{bb-xx}$: erit enim Pag. 173, lin. 18. ſumma $\frac{2a+b}{b}\sqrt{bb-xx}$, & differentia $\frac{2a-b}{b}\sqrt{bb-xx}$. Pari ratione additis $\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$ & $\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$, hoc eſt, $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$ & $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$, erit ſumma $8\sqrt{xx+12}$, eiſdemque ſubtractis, erit differentia $\overline{2x-2}\sqrt{xx+12}$.

Quòd ſi verò non communicantes fuerint, non poterunt addi vel ſubtrahi ita ut unam radicem conſtituant, quocirca addendæ vel ſubtrahendæ ſunt mediantibus ſignis $+$ & $-$. unde Binomia & Multinomia exſurgunt. Vt ſi addendum ſit $\sqrt{aa+bb}$ ad $\sqrt{aa-bb}$, ſcribo pro ſumma $\sqrt{aa+bb}+\sqrt{aa-bb}$; & ad ſubtrahendum $\sqrt{aa-bb}$ de $\sqrt{aa+bb}$, ſcribo pro reliquo $\sqrt{aa+bb}-\sqrt{aa-bb}$. Non ſecus ſi addatur $a+b$ ad $\sqrt{aa+bb}$, erit ſumma $a+b+\sqrt{aa+bb}$; at ſi ſubducatur $\sqrt{aa+bb}$ de $a+b$, erit reliquum $a+b-\sqrt{aa+bb}$. Cum enim $a+b$ ſit quantitas rationalis, & $\sqrt{aa+bb}$ quantitas ſurda, non magis communicantes eſſe poſſunt, quàm omnes quantitates ſurdæ, quæ diverſis ſignis radicalibus deſignantur. Haud diſſimili ratione concludes ſummam ex $aa+bb+a\sqrt{aa+bb}$ & $aa-bb-b\sqrt{aa+bb}$ eſſe $2aa+\overline{a-b}\sqrt{aa+bb}$, & differentiam eſſe $2bb+\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$.

De Multiplicatione quantitatum ſurdarum.

SI quantitates datæ ſunt communicantes, oportet, multiplicatis quantitatibus vel numeris extra ſignum radicale poſitis, productum multiplicare per quantitatem vel numerum ſub ſigno radicali contentum, ut habeatur productum quæſitum. Vt ad multiplicandum $\sqrt{75aa}$ per $\sqrt{27aa}$, hoc eſt, $5a\sqrt{3}$ per $3a\sqrt{3}$, multiplico primùm $5a$ per $3a$, & fit $15aa$: tum $15aa$ per 3, eritque productum quæſitum $45aa$.

Eodem modo ad multiplicandum $\sqrt{a^4+aabb}$ per $\sqrt{aabb+b^4}$, hoc eſt, $a\sqrt{aa+bb}$ per $b\sqrt{aa+bb}$: multiplicato a per b, &

 pro-

producto ab per $aa+bb$, fiet productum quæſitum a^3b+ab^3. Nec aliter fit ſi ad multiplicandum proponatur $\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$ per $\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$, hoc eſt, $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$, per $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$: Multiplicatis enim $x+3$ per $5-x$, fit $15+2x-xx$, quod multiplicatum per $xx+12$, productum facit $180+24x+3xx+2x^3-x^4$.

Quòd ſi datæ quantitates non fuerint communicantes, oportet tantùm multiplicare quantitates ſub ſignis radicalibus comprehenſas, & producto præfigere commune ſignum radicale. Si verò ſigna radicalia diverſa fuerint, reducenda priùs ſunt ad idem ſignum, ſicut ſuperiùs eſt oſtenſum, & deinde operandum, ut jam dictum eſt. Vt, ad multiplicandum $\sqrt{ab}$ per $\sqrt{cd}$: multiplicatis ab per cd, præfigatur producto $abcd$ ſignum $\sqrt{}$, & fit productum quæſitum $\sqrt{abcd}$. Sic & ad multiplicandum $\sqrt{aa+bb}$ per $\sqrt{aa-bb}$: multiplicatis $aa+bb$ per $aa-bb$, fiet productum $\sqrt{a^4-b^4}$. Similiter ſi multiplicari debeat $\sqrt{aa+bb}$ per $a+b$, reduco priùs $a+b$ ad idem ſignum radicale, & fit $\sqrt{aa+2ab+bb}$: tum multiplicatis $aa+2ab+bb$ per $aa+bb$, fit productum $\sqrt{a^4+2a^3b+2aabb+2ab^3+b^4}$, vel etiam ſcribendo hoc pacto: $\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$. Nec aliter fit ſi multiplicandum ſit $a+\sqrt{bc}$ per $a+\sqrt{bc}$, hoc eſt, $a+\sqrt{bc}$ in ſe: multiplico primùm $a+\sqrt{bc}$, per a, & fit $aa+a\sqrt{bc}$: tum $a+\sqrt{bc}$ per $\sqrt{bc}$, fitque $a\sqrt{bc}+bc$: quæ producta ſi addantur, fiet productum quæſitum $aa+bc+2a\sqrt{bc}$. Non ſecus ſi multiplicandum proponatur $\sqrt{aa+bb}+\sqrt{aa-bb}$ per $\sqrt{aa+bb}-\sqrt{aa-bb}$: quia multiplicando $\sqrt{aa+bb}$ per $\sqrt{aa+bb}$, & $+\sqrt{aa-bb}$ per $-\sqrt{aa-bb}$ (omiſſis ſcilicet tantùm ſignis radicalibus) fiunt $aa+bb$ & $-aa+bb$; at verò multiplicando $\sqrt{aa+bb}$ per $-\sqrt{aa-bb}$, & $\sqrt{aa+bb}$ per $+\sqrt{aa-bb}$ producta evaneſcunt: hinc productum quæſitum erit $2bb$.

De Diviſione quantitatum ſurdarum.

SI datæ quantitates ſunt communicantes, oportet tantùm dividere quantitates, vel numeros, extra ſignum radicale poſitos,

& quod

& quod oritur erit quotiens quæſitus. Vt ad dividendum $\sqrt{75aa}$ per $\sqrt{27aa}$, hoc eſt, $5a\sqrt{3}$ per $3a\sqrt{3}$: divido $5a$ per $3a$, ſeu 5 per 3; eritque quotiens quæſitus $\frac{5}{3}$ ſeu $1\frac{2}{3}$. Sic & ad dividendum $\sqrt{a^4+aabb}$ per $\sqrt{aabb+b^4}$, hoc eſt, $a\sqrt{aa+bb}$ per $b\sqrt{aa+bb}$: diviſis a per b, fit quotiens $\frac{a}{b}$. Non ſecus $\sqrt{abcc}$ ſeu $c\sqrt{ab}$ diviſum per $\sqrt{ab}$ dat c. Et ſic de aliis.

Quòd ſi communicantes non fuerint, dividendæ erunt quantitates ſub ſignis radicalibus comprehenſæ, & ei quod oritur præfigendum eſt commune ſignum radicale. Vt ad dividendum $\sqrt{a^3b-ab^3}$ per $\sqrt{aa-bb}$: diviſis a^3b-ab^3 per $aa-bb$, fit ab; unde quotiens quæſitus erit $\sqrt{ab}$.

Et quidem ſi ſigna radicalia fuerint diverſa, reducenda priùs erunt ad idem ſignum, & deinde operatio inſtituenda erit, ut jam dictum eſt. Vt ad dividendum a^3+abb per $\sqrt{a^4+aabb}$: multiplicando a^3+abb in ſe, fit $a^6+2a^4bb+aab^4$; quare diviſâ $\sqrt{a^6+2a^4bb+aab^4}$ per $\sqrt{a^4+aabb}$, erit quotiens $\sqrt{aa+bb}$. Sic & ſi dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4}$ per $a+b$: multiplico primùm $a+b$ in ſe, ut fiat ſub eodem ſigno radicali $\sqrt{aa+2ab+bb}$, quo facto, ſi dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2a^3b-b^4}$ per $\sqrt{aa+2ab+bb}$, fiet quotiens quæſitus $\sqrt{aa-bb}$.

Non aliâ ratione $aa+bb$ diviſum per $\sqrt{aa+bb}$, facit $\sqrt{aa+bb}$: quippe diviſo quadrato per ſuum latus, oritur latus. Vnde ſi a^3+abb dividatur per $\sqrt{aa+bb}$, orietur $a\sqrt{aa+bb}$.

Porrò ſi dividendum ſit $a^3+abb+ab\sqrt{aa+bb}$ per $a\sqrt{aa+bb}$, divido primùm a^3+abb per $a\sqrt{aa+bb}$, & fit, ut ante, $\sqrt{aa+bb}$; tum $ab\sqrt{aa+bb}$ per $a\sqrt{aa+bb}$, & fit b, unde quotiens quæſitus erit $\sqrt{aa+bb}+b$. Non ſecus ſi dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4}-aa+bb$ per $a+b$, orietur $\sqrt{aa-bb}-a+b$. Similiter ſi dividendum proponatur $ab+b\sqrt{bc}$ per $a+\sqrt{bc}$: quoniam ab diviſâ per a, eadem exoritur quantitas b, quæ provenit dividendo $b\sqrt{bc}$ per $\sqrt{bc}$: hinc quotiens quæſitus erit b. Eodem modo $aab-bbc-ab+\frac{bbc}{a}\sqrt{bc}$ diviſum per $a-\sqrt{bc}$, facit $ab-\frac{bbc}{a}$.

Poſtea ad dividendum $aa-bc$ per $a+\sqrt{bc}$ divido aa per a, & fit

& fit a, quod multiplicatum per $\sqrt{bc}$ producit $a\sqrt{bc}$, eritque reliquum dividendi $-a\sqrt{bc}-bc$. diviſo jam $-a\sqrt{bc}$ per a, fit $\sqrt{bc}$, quod multiplicatum per $+\sqrt{bc}$, facit $-bc$: hoc igitur ſi auferatur à reliquo dividendi $-bc$, relinquetur o, & abſoluta erit diviſio, eritque quotiens quæſitus $a-\sqrt{bc}$. Eodem modo $ab-cd$ diviſum per $\sqrt{ab}-\sqrt{cd}$, dat $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$: & $a^3+bc\sqrt{bc}$ diviſum per $a+\sqrt{bc}$, dat $aa+bc-a\sqrt{bc}$. & $aabb-ccdd$ diviſum per $\sqrt{ab}-\sqrt{cd}$, dat $\overline{ab+cd}\sqrt{ab}+\overline{ab+cd}\sqrt{cd}$: & $a^3b-abbc$ diviſum per $aa+a\sqrt{bc}$, dat $ab-b\sqrt{bc}$: ut & $a^3+abc+\overline{aa-bc}\sqrt{bc}$ diviſum per $a-\sqrt{bc}$, dat $aa+bc+2a\sqrt{bc}$.

Denique ad dividendum $\sqrt{a^4+b^4}$ per $c-d$: quia $\sqrt{a^4+b^4}$ per $c-d$ ſeu $\sqrt{cc-2cd+dd}$ dividi nequit, ſcribo pro quotiente $\frac{\sqrt{a^4+b^4}}{c-d}$, vel $\sqrt{\frac{a^4+b^4}{cc-2cd+dd}}$, vel etiam hoc pacto: $\frac{1}{c-d}\sqrt{a^4+b^4}$. Eodem modo ſi dividatur $a\sqrt{aa+bb}$ per $a+b$, fiet quotiens $\frac{a}{a+b}\sqrt{aa+bb}$. Similiter $aa+bb$ diviſum per $\sqrt{aa-bb}$ exhibet quotientem $\frac{aa+bb}{\sqrt{aa-bb}}$: & $aa+\sqrt{abcd}$ per $a+\sqrt{bc}$, facit $\frac{aa+\sqrt{abcd}}{a+\sqrt{bc}}$. Sic etiam ad dividendum $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ per $8\sqrt{xx+12}$, ſcribitur pro quotiente $\frac{180+24x+3xx+2x^3-x^4}{8\sqrt{xx+12}}$; vel quia $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ producitur ex $15+2x-xx$ in $xx+12$, quadratum nempe ipſius $\sqrt{xx+12}$, fit ut ſcribi quoque poſſit $\frac{\overline{15+2x-xx}\ \text{in}\ \overline{xx+12}}{8\sqrt{xx+12}}$, vel brevius $\frac{15+2x-xx}{8}\sqrt{xx+12}$, utpote dividendo $xx+12$ per $\sqrt{xx+12}$. Non aliter ſi $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ ſit dividendum per $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$, ſcribo pro quotiente $\frac{180+24x+3xx+2x^3-x^4}{\overline{x+3}\sqrt{xx+12}}$ ſeu $\frac{60-12x+5xx-x^3}{\sqrt{xx+12}}$. nam $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ dividi poteſt per $x+3$, & fit $60-12x+5xx-x^3$; vel quoniam $60-12x+5xx-x^3$ producitur ex $5-x$ in $xx+12$, fit ut etiam ſcribi poſſit $\frac{\overline{5-x}\ \text{in}\ \overline{xx+12}}{\sqrt{xx+12}}$ ſeu $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$.

De ExtractioneRadicis Quadratæ exBinomiis.

MOdus, quo ex quantitatibus binomiis radix quadrata extrahitur, non differt ab eo, qui in numeris adhiberi ſolet ad inventionem radicis quadratæ ex Binomiis, eſtque talis: *Regula extrahendi radicem quadratam ex Binomiis.*

Subductis quadratis partium dati Binomii à ſe invicem, ſi radix quadrata reliqui ad partem majorem addatur, & ab eadem auferatur; erunt radices quadratæ ex ſemiſſe ſummæ & differentiæ, per ſignum + vel — dati Binomii connexæ, binæ partes radicis quæſitæ.

Vt ad extrahendum radicem quadratam ex $aa+bc+2a\sqrt{bc}$, ſubtraho $4aabc$, quadratum minoris partis ex $a^4+2aabc+bbcc$ quadrato partis majoris, & relinquitur $a^4-2aabc+bbcc$, cujus radix quadrata $aa-bc$ addita ad majorem partem $aa+bc$, & ab eadem ablata facit ſummam $2aa$, & differentiam $2bc$, quarum ſemiſſes ſunt aa & bc: unde radices quadratæ ſunt a & $\sqrt{bc}$, quæ ſi connectantur per ſignum +, erit radix quæſita $a+\sqrt{bc}$.

Sic radix quadrata ex $mm+\frac{pxx}{m}+x\sqrt{4pm}$ erit $m+x\sqrt{\frac{p}{m}}$, *Pag. 182. lin. 13.*

Eodem modo ſi extrahenda ſit radix quadrata ex $\overline{a+b}\sqrt{ab}+2ab$: ſubducto $4aabb$, quadrato partis minoris, ex $a^3b+2aabb+ab^3$, quadrato majoris partis, erit reliqui $a^3b-2aabb+ab^3$ radix quadrata $\overline{a-b}\sqrt{ab}$. quæ ſi addatur & auferatur ex majori parte $\overline{a+b}\sqrt{ab}$, fiet ſumma $2a\sqrt{ab}$, & differentia $2b\sqrt{ab}$, unde ſemiſſium radices quadratæ conſtituunt radicem quæſitam. $\sqrt{a\sqrt{ab}}+\sqrt{b\sqrt{ab}}$ ſeu $\sqrt{\sqrt{a^3b}}+\sqrt{\sqrt{ab^3}}$.

Nec aliter fit cùm extrahitur radix quadrata ex $\overline{a+d}\sqrt{bc}+2\sqrt{abcd}$: etenim ſubtracto $4abcd$, quadrato minoris partis, ex $aabc+2abcd+bcdd$, quadrato majoris partis, relinquetur $aabc-2abcd+bcdd$, cujus radix quadrata eſt $\overline{a-d}\sqrt{bc}$: hæc ergo ſi addatur & ſubtrahatur ex majori parte $\overline{a+d}\sqrt{bc}$, erit ſumma $2a\sqrt{bc}$, & differentia $2d\sqrt{bc}$: Ex quarum dimidiis ſi radices quadratæ extrahantur, fiet radix quæſita $\sqrt{a\sqrt{bc}}+\sqrt{d\sqrt{bc}}$ vel $\sqrt{\sqrt{aabc}}+\sqrt{\sqrt{ddbc}}$.

Quòd ſi, ſubductis quadratis partium dati binomii à ſe invicem, reliqui radix quadrata & major pars binomii communicantes non fuerint: ſatius erit ipſi binomio ſignum univerſale radicis quadratæ præfigere. Vt ad extrahendam radicem quadratam

Pag. 6. ex $-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ ſcribo $\sqrt{-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$. quæ radices vulgò appellantur Vniverſales.

DE REDVCTIONE ÆQVATIONVM.

QVoniam ad reſolvendum aliquod Problema, id ipſum ſupponendum eſt ut jam factum, atque nomina imponenda ſunt quantitatibus tum datis, tum quæſitis; & quidem pro datis à D. Des-Cartes ordinariè ponuntur priores literæ Alphabeti *a*, *b*, *c*, &c. pro quæſitis autem poſteriores *z*, *y*, *x*, &c: fit ut percurrendo Problematis difficultatem, eo ordine, quo omnium naturaliſſimè patet, quâ ratione dictæ quantitates, nullo inter cognitas & incognitas facto diſcrimine, à ſe invicem dependent, tandem inveniatur via quantitatem aliquam duobus modis exprimendi. id quod Æquatio vocatur. Vnde cum æquatio nihil aliud ſit, quàm mutua comparatio duarum rerum æqualium, quæ variè denominantur: facilè conſtat, quantitates haſce cognitas & incognitas, prout diverſimode ſunt affectæ atque diſpoſitæ, diverſas efficere poſſe Æquationum formulas, quæ tamen per ſequentes regulas reduci queunt ad haſce ſimileſve ſpecies:

$z \propto b$, aut

$zz \propto -az+bb$, aut

$z^3 \propto +azz+bbz-c^3$, aut

$z^4 \propto +az^3+bbzz-c^3z+d^4$, &c.

De Reductione per Additionem.

VT ſi habeatur æquatio inter $z-3$ & 12, hoc eſt, ſi fuerit $z-3 \propto 12$: quoniam ſi æqualibus æqualia vel idem addas, ea quæ fiunt ſunt æqualia; hinc ſi utrinque addatur $+3$, fiet $z \propto 15$. nam -3 & $+3$ addita faciunt 0.

Sic & ſi fuerit $z-b \propto 0$, addendo utrinque b, fiet $z \propto b$. Aut ſi ha-

ſi habeatur $b - z \infty 0$, fiet, addendo utrobique z, $b \infty z$. Et ſi habeatur $zz - aq \infty 0$, erit $zz \infty aq$: ut & ſi $z^3 - aaq$ æquetur o, fiet $z^3 \infty aaq$, &c.

Non ſecus ſi habeatur $z^4 - az^3 - bbzz \infty d^4 - c^3 z$, addendo utrique parti $+ az^3 + bbzz$, fiet $z^4 \infty az^3 + bbzz - c^3 z + d^4$.

Ex quibus conſtat, quantitates ſigno — adfectas addi utrique parti, ſi eximantur ab una parte, & in alteram partem transferantur ſub ſigno +.

De ReductioneperSubtractionem.

DEinde ſi fuerit $z + 3 \infty 12$; quia, ſi ab æqualibus æqualia vel idem auferas, illa quæ relinquuntur ſunt æqualia, fit ut, ſubtrahendo utrinque $+ 3$, habeatur $z \infty 9$.

Eodem modo ſi habeatur $zz + az \infty bb$, ſubtracto utrinque $+ az$, fiet $zz \infty - az + bb$.

Similiter $z^3 + 2c^3 \infty azz + bbz + c^3$ reducetur ad $z^3 \infty azz + bbz - c^3$, ſubtrahendo utrinque $+ 2c^3$.

Vnde colligitur quantitates ſigno + adfectas ab utraque parte ſubtrahi, eximendo ipſas ex una parte & transferendo in alteram partem ſub ſigno —: atque adeò quicquid vel additione vel ſubtractione transfertur, adfici ſigno contrario.

De Reductione per Multiplicationem.

POrrò ſi ad reducendum proponatur $\frac{z}{3} \infty 5$: quoniam æqualia per æqualia vel idem multiplicata, producunt æqualia; fiet multiplicando utrinque per 3, $z \infty 15$. Sic & ſi habeatur $z \infty \frac{aq}{z}$, invenietur, multiplicando utrinque per z, $zz \infty aq$, &c.

Eodem modo ſi fuerit $\frac{zz}{z-b} \infty a$: quoniam, delendo denominatorem $z - b$ prioris partis $\frac{zz}{z-b}$, ipſa pars multiplicatur per $z - b$: hinc oportet etiam alteram partem a multiplicare per $z - b$, ut habeatur æquatio inter zz & $az - ab$.

Similiter ſi ſit $\frac{zz}{a} \infty \frac{zz - bz + bb}{z}$: quoniam, ſublato denominatore

tore a partis prioris $\frac{zz}{a}$, multiplicata eſt pars prior per a, & fit zz; hinc oportet & alteram partem $\frac{zz - bz + bb}{z}$ multiplicare per a, ut habeatur $\frac{azz - abz + abb}{z}$. Vnde cum æquatio propoſita reducta ſit ad $zz \propto \frac{azz - abz + abb}{z}$, ſi denuo utraque pars multiplicetur per z, denominatorem poſterioris partis $\frac{azz - abz + abb}{z}$, fiet $z^3 \propto azz - abz + abb$.

Ex quibus patet, æquationem, cujus utraque pars eſt fractio, reduci ad aliam, quæ fractione caret, multiplicando per crucem, numeratorem nempe prioris partis per denominatorem poſterioris, & numeratorem poſterioris partis per denominatorem prioris. Quod idem eſt ac ſi binæ partes æquationis ad eandem denominationem reducantur, ipſæque deinde, omittendo communem denominatorem, per eundem multiplicentur.

Vbi notandum, ad majorem abbreviationem atque operationis facilitatem, non rarò tum numeratores, tum denominatores, ante hanc multiplicationem ad ſimpliciores terminos reduci poſſe. Vt ſi fuerit $\frac{z^3}{zz - aa} \propto \frac{az - aa}{z + a}$: reductis denominatoribus $zz - aa$ & $z + a$ ad $z - a$ & 1, fiet $\frac{z^3}{z - a} \propto \frac{az - aa}{1}$. ac proinde, ſi multiplicetur per crucem, invenietur $z^3 \propto azz - 2aaz + a^3$. Similiter ſi habeatur $\frac{aaz - bbz}{z + b} \propto \frac{a^3 - abb}{z}$: reductis numeratoribus $aaz - bbz$ & $a^3 - abb$ ad z & a, habebitur $\frac{z}{z + b} \propto \frac{a}{z}$, ubi ſi per crucem multiplicetur, fiet $zz \propto az + ab$. Non-ſecus ſi habeatur $\frac{azz - bzz}{bb - bz} \propto \frac{aa - ab}{b}$: cum numeratores $azz - bzz$ & $aa - ab$ reduci poſſint ad zz & a, ut & denominatores $bb - bz$ & b ad $b - z$ & 1, fiet $\frac{zz}{b - z} \propto \frac{a}{1}$; ideoque multiplicando per crucem, exſurget $zz \propto -az + ab$.

Huc etiam refer, cùm integrum æquatur fractioni. Vt ſi habeatur æquatio inter $\frac{az^3 - bz^3}{zz + az + aa}$ & $ab - bb$: ſubſtituta enim unitate pro denominatore ipſius integri $ab - bb$, cum $az^3 - bz^3$ & $ab - bb$ reduci poſſint ad z^3 & b, erit æquatio talis

z^3

$\frac{z^3}{zz+az+aa} \infty \frac{b}{1}$, unde multiplicando per crucem, invenietur æquatio $z^3 \infty bzz+abz+aab$.

Ad hæc ſi proponatur $\sqrt{z}$ æquari 5: quoniam æqualium æqualia quoque ſunt quadrata, cubi, &c; hinc ſi utraque pars in ſe multiplicetur quadratè, habebitur $z \infty 25$. Sic & ſi fuerit $\sqrt{z} \infty \sqrt{5}$: ductâ utrâque parte in ſe quadratè, fiet $z \infty 5$. Pari ratione ſi $\sqrt{z}$ æquetur $\sqrt{aab-b}$, erit $z \infty aab-b$. Haud ſecus ſi fuerit $\sqrt{C.z} \infty \sqrt{C.aabb-b}$, fiet, utramque partem in ſe multiplicando cubicè, $z \infty aabb-b$. Et ſic de aliis.

De Reductione per Diviſionem.

Poſtea ſi detur $zz \infty 4z$: quoniam, æqualibus per æqualia vel idem diviſis, proveniunt æqualia, fit ut, ſi utraque pars dividatur per z, oriatur $z \infty 4$. Sic & ſi habeatur $z^4 \infty az^3+bbzz$, dividendo utrinque per zz, fiet $zz \infty az+bb$. Similiter fit, ſi proponatur $3z \infty 12$: etenim ſi utrobique dividatur per 3, proveniet $z \infty 4$. Eodem modo ſi fuerit $az \infty ab$, dividendo utramque partem per a, fiet $z \infty b$. Nec aliter ſi habeatur $ax-bx \infty bb$, orietur, diviſâ utrâque parte per $a-b$, $x \infty \frac{bb}{a-b}$. Haud ſecus ſi pro- Pag. 149. lin. 27.
ponatur $azz+bzz \infty abz+bbz-abb-b^3$: quoniam utraque pars dividi poteſt per $a+b$, orietur $zz \infty bz-bb$. Sic & ſi fuerit $azz-bzz \infty aaz-bbz+abc$, dividendo utrinque per $a-b$, fiet $zz \infty az+bz+\frac{abc}{a-b}$, ſeu $zz \infty \begin{matrix}a\\+b\end{matrix}z+\frac{abc}{a-b}$.

Huc referendum quoque eſt, cùm binæ æquationis partes, juxta modum p. 34. oſtenſum, reduci poſſunt ad ſimpliciores terminos. Vt ſi fuerit æquatio inter $az^4-abz^3+abbzz$ & $-abz^3+2abbzz-2ab^3z+ab^4$: dividendo utramque partem per maximum communem diviſorem $azz-abz+abb$, orietur $zz \infty -bz+bb$.

De Reductione per Extractionem Radicis.

Denique ad reducendum $zz \infty 25$: quoniam æqualium quadratorum ac cuborum &c. æqualia quoque ſunt latera ſeu radices, ſit ut, ſi ex utraque parte extrahatur radix quadrata, proveniat

veniat $z \infty 5$. Sic & ſi fuerit $z^3 \infty 125$, erit, extractâ utrinque radice cubicâ, $z \infty 5$. Eâdem ratione, ſi habeatur $zz \infty aa + 2ab + bb$: extractâ utrobique radice quadratâ, fiet $z \infty a + b$. Nec aliter fit ſi fuerit $zz \infty aa + bc + 2a\sqrt{bc}$, erit enim $z \infty a + \sqrt{bc}$. Non ſecus ſi xx
Pag. 6. æquetur $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, erit $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$.

His ſubjunge ſequens exemplum, in quo omnes præcedentes modi reductionis ſimul occurrunt. Proponatur $\sqrt{\frac{zz+3aa}{4}} - \sqrt{\frac{zz-3aa}{4}} \infty \sqrt{\frac{azz}{b}}$: quia igitur eorum, quæ æqualia ſunt, æqualia quoque ſunt quadrata, fiet, multiplicando utramque partem in ſe quadratè, $\frac{1}{2}zz - \sqrt{\frac{z^4-9a^4}{4}} \infty \frac{azz}{b}$. Addatur jam utrinque $\sqrt{\frac{z^4-9a^4}{4}}$, & ſubtrahatur $\frac{azz}{b}$, transferendo ſcilicet ipſas in alteram partem ſub contrario ſigno, ut habeatur $\sqrt{\frac{z^4-9aa4}{4}}$ ſola ex una parte, fietque $\frac{1}{2}zz - \frac{azz}{b} \infty \sqrt{\frac{z^4-9a^4}{4}}$. Quo facto, multiplicetur rurſus utraque pars æquationis in ſe quadratè, ut evaneſcat ſignum radicale; habebiturque $\frac{1}{4}z^4 - \frac{az^4}{b} + \frac{aaz^4}{bb} \infty \frac{z^4-9a^4}{4}$. Vbi ſi utrinque dematur $\frac{1}{4}z^4$, ac reliquæ partes omnes addendo ac ſubtrahendo ex una parte in alteram transferantur, quod fit mutatis tantùm ſignis, erit $\frac{az^4}{b} - \frac{aaz^4}{bb} \infty \frac{9a^4}{4}$. Porrò ut deleantur fractiones, reducantur omnes termini ad communem denominatorem $4bb$: quo peracto ſi utrinque per eundem multiplicetur, ipſum nempe denominatorem omittendo, obtinebitur $4abz^4 - 4aaz^4 \infty 9a^4bb$. Dividatur jam ubique per a, hoc eſt, a ubique deleatur fitque $4bz^4 - 4az^4 \infty 9a^3bb$: quo facto, dividatur utraque pars per $4b - 4a$ ut habeatur quantitas z^4 ex una parte ſola, eritque $z^4 \infty \frac{9a^3bb}{4b-4a}$. Vbi ſi utrobique extrahatur radix quadrata, habebitur $zz \infty \frac{1}{2}ab\sqrt{\frac{a}{b-a}}$: & ſi denuo utrinque extrahatur radix quadrata, invenietur $z \infty \sqrt{\frac{1}{2}ab\sqrt{\frac{a}{b-a}}}$.

E quibus patet, reductionem per additionem & ſubtractio-

nem

nem inſtitui tam ad diminuendam multitudinem terminorum, quàm ad æquationem ritè ordinandam; reductionem verò per multiplicationem ad evitandas tum fractiones tum quantitates ſurdas; & reductionem per diviſionem, tam ad deprimendas dimenſiones, quàm ad reducendam æquationem ad debitam formam & ſimpliciſſimos terminos; ac denique reductionem per extractionem radicis, ad obtinendam æquationem ex minimis terminis conſtantem; præterquam quòd omnes hæ reductiones etiam ad quantitatem quæſitam ex data æquatione inveniendam utiles eſſe poſſint. Atque hæc quidem ad introductionem Methodi Geometriæ Renati Des-Cartes dicta ſufficiant.

F I N I S.

FRANCISCUS à SCHOOTEN
AD LECTOREM.

CÆterùm ne locus ſuperſtes hujus paginæ vacuus relinqueretur; viſum fuit hoc loco ſimul indicare ſphalmata, quæ in Exercitationibus noſtris Mathematicis, quas anno 1657 in lucem emiſimus, fuerunt commiſſa, ac poſtmodum à nobis recognita: ut, iis ſequenti modo correctis, Lectoris ſtudium in conſimili argumento abſque mora occuparetur.

Pag. 6. l. 2 lege *pretium*. p. 7. l. 8 lege *quæſtio*. p. 163. l. penult. lege *quæſiverim*. p. 193. l. 12. lege *nulla omnino*. p. 228. l. 3 lege fit zz — 2*aa*. ibid. l. penult. lege *in circumferentia*. p. 295. l. 28 lege *deſcriptio*. p. 317. l. 22 lege *quod eſt rectum*. p. 327. l. 4 lege *Oſtenſo*. ibid. l. antep. lege *ipſa circa*. p. 329. l. 10 pro E G lege E C. p. 347. l. 5 pro E C, E F lege ε C, ε F. p. 361. l. 1. lege *ad E, ita ut A E ſit æqualis AB*. p. 372. l. antep. poſt *Quod*, & p. 393. l. 9 poſt *Quod eo* tolle virgulas. p. 423. l. 15 pro 69 lege 639. p. 432. l. 7 lege 1634. p. 434. l. ult. & p. 462. l. 30, ut & p. 480. l. 24. lege *abs re*. p. 471. l. 22 lege *in locum x x*. p. 525. lineæ 6, 7, 8, 9, 10 in locum linearum 2, 3, 4, 5 ſunt ſubſtituendæ, & vice verſâ. p. 527. l. 21 lege *Hæ autem*.

DE
ÆQVATIONVM
Natura, Conſtitutione, & Limitibus
Opuſcula Duo.

Incepta à

FLORIMONDO DE BEAVNE,

In Curia Bleſenſi Conſiliario Regio;

Abſoluta verò, & poſt mortem ejus edita

ab

ERASMIO BARTHOLINO,
Medicinæ & Mathematum in Regia Academia
Hafnienſi Profeſſore publico.



AMSTELODAMI,
Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.
Sumptibus Societatis.

SVMMO MVSARVM

MÆCENATI

ILLVSTRISSIMO ET EXCELLENTISSIMO

DOMINO,

IOACHIMO GERSDORPH

TOPARCHÆ IN TVNDBYHOLM, &c.

EQVITI AVRATO,

REGNI DANIÆ SVMMO AVLÆ MAGISTRO,

PRINCIPI SENATORI,

REGIÆ MAIESTATIS PRÆSIDI BORINGHOLMENSI

HOC

SPECIMEN ANALYTICES

NOVO ARGVMENTO

CONSECRAT

OBSEQVIVM.

Quod

QVod jam pridem in votis erat, ſtudii & pietatis meæ experimentum Tibi probari, id recentiſſima Muſarum Algebra interpretabitur. Etſi enim, beneficia maxima, quibus me totamque domum noſtram oneraſti, quàm grato animo exceperim, mihi ipſe ſim teſtis; tamen miſeram eam vitam putavi, cui eſſe gratam probare antea non licuit: id aliquo obſequio, tum ipſi Tibi, tum cæteris omnibus indicatum, maximeque perſpicuum eſſe deſideravi. Neque æquum eſt, virtutis deprædicationem privatis tantùm parietibus claudi. Inter ingratos etiam annumerantur ii, qui beneficia accepta paucis commemorant; totus Orbis, adhibendus eſt, pietatis noſtræ teſtis & conſcius. Quoniam verò monimentum Tuarum virtutum nulla unquam obſcurabit oblivio; nullum erit tali Heroi dignius genus obſequii, quàm

quod nulla temporis circumſcriptione terminatur. Quocirca hoc opuſculum Algebraïcum opportuniſſimum exiſtimavi, quod meæ perpetuæ obſervantiæ teſtem ſempiternum conſtituerem; in quod haud obſcurè conjicio, nihil ſenectuti, nihil ſucceſſoribus licere. Mirandam Algebræ vim multis verbis exponere ſupervacuum eſt, quippe ſecura demonſtrationis ſuæ, ſemper & pacis & belli ſerviit artibus; in qua hoc eximium eſt, quòd abundantias defectusque pari momento æſtimet, neque illi, quæ plus habent, magis neceſſaria ſunt, quàm quæ minus; atque hoc ſuæ ſcientiæ habet monimentum, quod mortales faciunt Virtutis. Verùm, artium & ſcientiarum incrementa, non in ipſarum modo ingenio, ſed etiam in ſuperiorum clementia ſita ſunt; æſtimantur quoque pleraque mortalium pretio, quod libido calumniandi conſtituit; & quis neget, eximium decus, ſæ-

piùs

piùs favoris, quàm virtutis eſſe beneficium? unde patrono & defenſore iis opus eſt, ſub cujus auſpiciis floreant. Algebræ nihil ad augendum faſtigium ſupereſt, hoc tamen uno modo creſcere poteſt. Te ergo præſertim invocat, cujus cepimus & affectus & judicii experimentum, quantum maximum Muſæ capere potuerunt. Indulgentiæ Tuæ propinquum exemplum eſt Aſtronomia, quam in Tuo gremio ſuſcepiſti, cum naufragium illud obſervationum Tychonicarum, quas invidioſâ tranquillitate provectas improviſus turbo abſtulerat, Tuâ benignitate reſarcires. Tuo beneficio patriam receperunt. Taceo literas Græcas, quas majoribus ſuis ita reddidiſti, ut illæ utrum plus Tibi, an Tu illis debeas ambigi poſſit. Et ut verbo abſolvam, Tuæ benevolentiæ uſum nec litteris nec hominibus unquam denegaſti. Quare illud extremum oro, ut eidem Generoſitati, cui tribuiſti hoc, ut

 lite-

literas ſuſciperes, attribuas, ut ſuſceptas tuearis ac foveas: atque hoc grati animi, non omnino quale velim, ſed quale poſſum hoc tempore monimentum, favore excipere digneris. Celebratum eſt famâ & acclamatione quantum Aſtronomiam amplificaverit Dania, Tibi verò renaſcentis Aſtronomiæ gratia debetur. Et ſi propoſito annueris, non tam patriæ quàm Tibi debitorem conſtitues etiam Algebram, hoc eſt, Matheſin Vniverſalem. Ego florentem virtutis Tuæ gloriam æternam opto, Tibique feliciſſimos annos precatus, in clientelam Tuam receptum eſſe, ſupra humanum ſolatium recreabor.

Ill[æ] & Exc[mæ] D[ni] V[æ]

Haſniæ, Anno CIↃ IↃ CLVII.

Deditiſſimus

ERASMIVS BARTHOLINVS,
Medicinæ & Mathematum Profeſſor Regius.

ERASMI BARTHOLINI
Ad Tractatum de Natura & Conſtitutione
Æquationum

EPISTOLA PRÆLIMINARIS

Ad Clariſſimum Virum

CLAVDIVM HARDY,

Regis Galliæ Conſiliarium.

QVamvis ſiniſtra hujus ſeculi judicia parùm apud me valeant, tamen à divulgandis ejuſmodi quemlibet jure abſterrerent, quæ diverſas hominum cenſuras vitare nequeunt. Verùm ego alto ſupercilio ſpretis calumniis, æquitatis amantior & publicæ utilitatis, propoſito deſiſtere nolui, tibique, Vir Clariſſime, exponere conſtitui, ea, quæ ad præfationem utilia eſſe putavi, eò libentius, quò cognoverim amiciſſimum tibi fuiſſe, dum in vivis eſſet, D. De Beaune, in Curia Bleſenſi Conſiliarium Regium. Nam etſi vir hic fuerit pereleganti ingenio, & in tantum laudandus, in quantum intelligi virtus poteſt; tamen hoc in eo maximum fuit, quòd Mathemata doctiſſimus, ut tempore æqualis Viro ſummo D. Des-Cartes, ita Analytices ſpecioſæ peritiâ proximus. Quo momento impulſus, dum Bleſiis linguæ Gallicæ exercendæ gratiâ degerem, amicitiam tanti Viri colui, diligenterque eâ familiaritate uſus ſum, quâ ipſe me comiter amplectebatur. Interea de rebus Mathematicis omnis ferè ſermo, & quoties

alter-

alterutri de Analyticis ſermocinari volupe, toties noſtra conferri colloquia neceſſe erat. Unde non obſcurè intellexi, quantis fuerat ingenii dotibus ac ſtudiorum eminens, à quo, ſi publica negotia permitterent, perfectio Algebræ maximè ſperari poſſet. Quare variis precibus hortatus ſum, ut, quæ meditatus erat, publicis deſtinaret uſibus. Verùm ille multa ſibi obſtare, occupationes tam publicas quàm privatas, valetudinem, operas amicorum, ea denique principia, quæ ad intellectum ſuarum meditationum neceſſaria erant, deſiderari innuebat. Tum ego, & meam operam ipſi polliceri paratiſſimam cœpi, & ſignificare conſcriptam eſſe à me Iſagogen Carteſianam, quorum neutrum propoſito moram afferre diutiùs poſſet. Quibus valde recreatus, de edendis operibus ſuis ſeriò cogitabat. Sed, cùm Arthriticis doloribus plus ſolito, lecto detineretur, omnem à Mathematicis, ad corporis valetudinem, curam transferre cogebatur. Ego interim ad perluſtrandas reliquas Galliæ provincias avocatus, per aliquod tempus ſubſtiti Flexiæ; unde, cum varia negotia reverti Lutetiam ſuaderent, placuit Caſtrum Bleſenſe tranſire, ut de ſanitate amici certior fierem. Quem in prædio ſuo, cum doloribus Colicis acriter conflictantem, cùm deprehendiſſem, & affirmantem parùm proſperâ valetudine ex eo tempore ſe uſum fuiſſe; non mediocriter dolui, egregiis inventis fortunam tam eſſe adverſam: mea verò ſtudia iteratò

ratò obtuli, promittens, me bono publico, ejuſque gratiâ, quaſvis ſubiturum moleſtias. Sed poſtquam relaxationis morbi nulla affulgeret ſpes, ſuſpirans valedixi, iterque ſuſceptum ingreſſus, Lutetiam redii. Vix ibi conſueta ſtudia revocaveram, cum literæ mihi redderentur ab hoſpite meo, Viro humaniſſimo, D. Antonio Marchais, in urbe Bleſenſe tunc linguæ Gallicæ Profeſſore, nunc verò Sereniſſimi Principis Gaſtonis, Ducis Aurelianenſium, Mathematico, quibus nuntiabatur, ægrum noſtrum, oculorum uſu privatum fuiſſe, temporibus ſolſtitii Brumalis, ab acrimonia defluxionis Arthriticæ; exoptaſſe verò meam præſentiam tanto deſiderio, ut de editione cogitationum ſuarum deſperaret, niſi meâ operâ uti poſſet; adeoque rogaſſe, niſi grave nimis eſſet, operam quam pollicitus eram accommodarem. Exarſerat eâ tempeſtate bellum civile inter Regem Galliæ & Principes conſanguineos, ſedeſque exercitus Principum erat Stampæ, quam obſidione aggrediebatur Dux exercitus Regii. Hac cum tranſeundem eſſet iis, qui ad Comitatum Bleſenſem pergunt; ancipiti curâ diſtractus, conſtitueram tamen longiſſimis viarum ambagibus, per Normanniam & Ducatum Andegavenſem potiùs iter moliri, quàm ſpes amici deſerere. Quippe ea pars territorii Pariſienſis, Rothomagum versùs, tantum militibus vacavit. Cum inexſpectato, propter adventum exercitus Lotharingici, ſolutâ obſidione Stampæ, ager Gaſti-

nenſis, milite utriuſque partis liberaretur; prædonibus tamen infeſtari vias ſignificatum eſt. Quare arreptâ occaſione, diſſuadentibus amicis, itineri me commiſi; parvi æſtimans, uno periculo, & amico prodeſſe, & præclara inventa redimere. Neque primas ſpes fortuna deſtituit; quippe emenſo periculoſiſſimo itinere, ſalvus reviſi amicum, corpore ſatis ſanum, niſi lumen oculorum rapuiſſet ægritudo. Sed dubium itineris eventum deterior fortuna excepit; cum in primordio noſtrorum operum, forſan quòd diligentius, quàm permitteret anni tempus, Algebraïcis ſubtilitatibus incumberem, æſtate mediâ, ſummis caloribus, ſub Caniculam, in graviſſimum morbum ex febri ſynocho inciderem. Et jâm de mea ſalute deſperantibus Medicis, inopinatò animam efflavit Vir Ampliſſimus D. De Beaune. Nam, cum amico aliquo, qui lecto ejus aſſiderat, de rebus Analyticis diſſerentem, ſubitò deſtituit vox, deinde totum corpus vitalis calor reliquit, atque evaſit perpetuam valetudinem die 19 Auguſti, Anno 1652, natus Anno 1601 die 27 Sept. Sic præcipitantibus fatis, fefellit ſpes omnium mortalitas. Ego, cum mihi indicari inconſultum ducerent noſtri, dum morbus nondum declinaret, ne ægritudinem aggravarent, non niſi poſt multum tempus id reſcivi. Tum nihil cunctatus, operam dedi, ut fidei meæ committerentur, quæ relicta fuerant adverſaria, nullam curam mortuo detrectans, quam vivo deſtinaveram, publicæ utilitatis ratio-

nem

nem habiturus. Reluctantibus verò hæredibus, cum alius pecuniâ ſolicitaſſet animos eorum; parum abfuit, quin idem ſcripta, qui auctorem, caſus traxiſſet. Ergo omni ſtudio demonſtrare occœpi, perituros omnes defuncti conatus niſi mihi traderentur; ſparſas chartas, ſine ordine, ſine numero, ſine explicatione, notis & characteribus exaratas ſupputationes, non ab alio intelligi poſſe, quàm qui aliquo tempore cum ipſo familiariter vixiſſet. Quibus perpenſis, tandem obtinui propoſitum, ſed majori labore, quàm ſucceſſu. Quippe omnia diligentiùs inſpiciens, animadverti plura affectata quàm effecta. Inter tot adverſaria ſolummodo abſolutum inveni opus de Angulo Solido, quod jam pridem in publicum edidiſſem, niſi ſumptus, propter copiam figurarum, Bibliopolæ faſtidiviſſent. Tractatûs de Natura & Conſtitutione Æquationum ne litera quidem extabat, menti tamen D. de Beaune pleraque conformia eſſe diſſerendo dum licuit cum vivo comperi. Ex iis, quæ de Limitibus Æquationum conſcripſi, quædam reperta ſunt in adverſariis, quibus, cum multa deſiderarentur, ultimam manum imponere neceſſe habui. Præfationem denique, quam Author huic operi præmittendam duxit, ne religio eſſet omittere, addidi. Non ignoras, Vir Clariſſime, me rogatu Authoris omnia Gallicè prius conſcripſiſſe, tibique & aliis perlegenda dediſſe & corrigenda; tamen nunc Latinè edere coactus ſum, ne diutiùs laterent. Nam etſi tibi

dum in Italia degerem, adeò cordi fuerit horum ſcriptorum à me tibi relictorum editio, ut ſumptibus propriis excudi parares, quo nomine multum tibi debebunt poſteri; tamen ne in Gallia quidem votum aſſecutus es. Quocirca, cum Amſtelodami iterato prælo ſubjiceretur Geometria Renati Des-Cartes, id operam dedi, ut hæc unà imprimerentur. Conſentiente verò Typographo modò Latinè extarent, placuit Latinam interpretationem in conſilium adhibere, & potiùs authoris precibus inobediens, quàm publici negligentior reputari. Quod perpendendum relinquo iis, qui me violatæ fidei tacitè accuſabunt. Subjunxiſſem alia, quorum veſtigia adhuc ſuperſunt in adverſariis, ſed quædam tanti indigent laboris, ut de reſtitutione quaſi deſperem, alia remoratur multitudo figurarum: cuncta tamen brevi videbit benevolus Lector, ſi Typographi obedierint. Interea hiſce fruere, tuque Vir Clariſſime, judica quid ex meis curis, & difficillimis itineribus, fructus colligi poſſit, tuum namque judicium erit inſtar omnium. Quod ſi tamen & alii confiteantur, hinc non exiguum emolumentum ad omnes redundare, rogo ut id Manibus Viri Clariſſimi Florimondi de Beaune acceptum referant; errores verò ſi offenderint, benignè corrigant, meæque humanitati aſcribant. Vale.

PRÆFATIO.

DEcreveram in publicum edere hoſce tractatus, multò prolixiores atque perfectiores, proximo inſequente anno. Verùm anni hujus initio conflictatus cum graviſſimo ad oculos defluxu, oculorum uſu privatus fui. Vnde propoſito planè deſtitiſſem, niſi D. Eraſmius Bartholinus operam mihi ſuam, ne mea circa hanc artem inventa oblivione ſepulta jacerent, obtuliſſet. Ejus igitur auxilio hoc opus compoſui, ad quod intelligendum ſuppono Lectores jam in Geometria Renati Des-Cartes verſatos, additisque in eam Notis, à nobis olim (non quidem animo illas in publicum edendi) concinnatis; ut & doctiſſimis Franciſci à Schooten Commentariis; nec non Principiis Matheſeos Vniverſalis, ſeu Introductione ad Methodum Geometriæ Renati Des-Cartes, ab eodem Bartholino editâ.

PRIOR TRACTATVS
DE
NATVRA
ET
CONSTITVTIONE
ÆQVATIONVM.

DE

DE NATURA ÆQUATIONUM.

CAPUT I.

MUltò faciliùs inveniemus Naturam & Conſtitutionem Æquationum ex earum generatione & comparatione cum ſimilibus ſeu ejuſdem formæ, quàm conferendo earum radices cum certis mediis Geometricè proportionalibus, ut præſtitit Viëta.

Æquationes autem facilitatis gratiâ ita diſponere libet, ut omnes termini ab una parte reperiantur æquales nihilo, ponendo ipſos ordine, prout gradatim per incognitæ quantitatis dimenſiones deſcendunt. Primum enim terminum vocabimus, ipſam quantitatem incognitam, quæ plurimarum dimenſionum exiſtens nullis aliis quantitatibus adficitur; ſecundum verò, in quo incognita quantitas unâ dimenſione minor eſt; tertium in quo duabus; & ſic deinceps, uſque ad terminum omnino cognitum, quem pro ultimo habemus. Deinde, loca, ubi terminorum aliqui deficiunt, aſteriſco complebimus, quæ tum ſub numero terminorum comprehendentur. Hæc omnia beneficio tranſpoſitionis facilè peraguntur.

Ex iis, quæ ſcripta & commentata ſunt in Geometriam Renati des Cartes, nota eſt methodus cognoſcendi, quot haberi poſſint radices in qualibet Æquatione: nimirum, poſſe Æquationem tot habere veras radices, quot mutationes ſignorum continuæ adfuerint, & quoties eadem ſigna ſe invicem ſequuntur immutata, tot poſſe reperiri falſas radices: modò in numerum terminorum ii numerentur, qui deficiunt.

Porrò, duas Æquationes ſimiles eſſe dicimus ſeu ejuſdem formæ, quando in utraque idem eſt primus terminus, & reliqui termini in utraque ſimiliter ſunt affecti; & ſi in una terminus aliquis abſuerit, ut is quoque abſit in altera. Nam cùm ſimiles ſunt Æquationes, eandem habebunt conſtitutionem & naturam, & fieri poterit comparatio ſeu collatio ſingulorum terminorum unius cum ſingulis terminis correſpondentibus alterius.

CAPVT II.

De natura & conſtitutione Æquationum Quadratarum, ſeu duarum dimenſionum.

QVando æquationes hæ ſunt affectæ, reducuntur omnes ad tres formas ſequentes:

$$xx + lx - mm \propto o$$
$$xx - lx - mm \propto o$$
$$xx - lx + mm \propto o.$$

1 *Propoſitio.*

Ad intelligendam naturam & conſtitutionem prioris æquationis, formetur per multiplicationem harum duarum $x - b \propto o$ & $x + c \propto o$ ſequens æquatio: $xx - bx - bc \propto o$. Supponendo
$+c$
igitur c majorem quàm b, eandem habebit formam atque prima propoſitarum $xx + lx - mm \propto o$. & per conſequens, binæ hæ æquationes erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat collatio unius cum altera; & per comparationem terminorum ſecundorum habebimus $c - b \propto l$. Vnde diſcimus, l eſſe differentiam inter falſam radicem c & veram b; & , cognitâ falsâ c, veram b eſſe æqualem ipſi $c - l$; & , cognitâ verâ b, falſam c eſſe æqualem ipſi $b + l$.

Præterea, ex comparatione poſtremorum terminorum habebimus mm æqualem bc. Vnde ſequitur mm eſſe æquale rectangulo ſub vera & falſa radice; & , cognitâ falsâ c, veram b æqualem eſſe $\frac{mm}{c}$; & , cognitâ verâ b, falſam c æqualem eſſe $\frac{mm}{b}$.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda æquatione propoſita formetur rurſus per multiplicationem duarum $x - b \propto o$ & $x + c \propto o$, æquatio $xx - bx - bc \propto o$.
$+c$
In qua ſi ſupponamus b majorem quàm c, erit ipſa ejuſdem formæ cum ſecunda propoſita $xx - lx - mm \propto o$. Et per conſequens duæ illæ æquationes erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Factâ ergo collatione unius cum altera, habebimus ex col-

latio-

latione ſecundorum terminorum $c - b \infty - l$, vel $l \infty b - c$. Vnde diſcimus, quòd l eſt differentia inter veram radicem b & falſam c; & ſi cognita fuerit falſa c, erit vera b æqualis $l + c$; & ſi fuerit cognita vera b, falſa c erit æqualis $b - l$.

Porrò, per comparationem poſtremorum terminorum, habebimus $mm \infty bc$. Vnde ſequitur mm eſſe æquale rectangulo ſub vera & falſa radice; &, cognitâ falsâ c, veram b eſſe æqualem $\frac{mm}{c}$; &, cognitâ verâ b, falſam c eſſe ∞ $\frac{mm}{b}$.

3. *Propoſitio.*

Pro tertia ſupra poſita æquatione, formemus, per multiplicationem duarum $x - b \infty o$ & $x - c \infty o$, æquationem ſequentem $xx \begin{smallmatrix} - b \\ - c \end{smallmatrix} x + bc \infty o$, & habebit eandem formam atque propoſita tertia $xx - lx + mm \infty o$, & conſequenter hæ binæ æquationes erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Comparemus ergo unam cum altera, atque ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $b + c \infty l$. Vnde diſcimus, quòd l eſt ſumma duarum verarum radicum, & ſi una earum, exempli gratiâ, c, eſt cognita, reliqua b æquabitur $l - c$.

Præterea ex comparatione ultimorum terminorum habebimus $mm \infty bc$; hoc eſt, mm æquale rectangulo ſub duabus veris radicibus, quarum ſi alterutra eſt nota, exempli gratiâ, c, altera b æquabitur $\frac{mm}{c}$.

Quantum ad æquationem quadratam $xx - mm \infty o$, quæ non eſt affecta, ipſa oritur ex duabus ſequentibus $x - m \infty o$, & $x + m \infty o$. Vnde ſequitur ipſam duas poſſidere radices, unam veram, alteram falſam, quarum utraque æquatur ipſi m.

CAPVT III.

De natura & conſtitutione Æquationum Cubicarum ſeu tertiæ dimenſionis, ſecundo termino carentium.

Omnes hæ æquationes reducuntur ad tres ſequentes formas:

$$x^3 * + mmx - n^3 \infty o.$$
$$x^3 * - mmx - n^3 \infty o.$$
$$x^3 * - mmx + n^3 \infty o.$$

1 Propoſitio.

Ad cognoſcendam naturam & conſtitutionem prioris æquationis propoſitæ, formemus per multiplicationem harum duarum $xx + bx + cc \infty o$ & $x - b \infty o$ hanc æquationem $x^3 * - bbx - bcc \infty o$. Suppoſito autem cc majori quàm bb,
$\quad + cc$
ipſa eandem habebit formam atque prima propoſita $x^3 * + mmx - n^3 \infty o$. & per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat igitur illarum collatio, & per comparationem tertiorum terminorum habebimus $cc - bb \infty mm$. Vnde conſtat, ſi vera radix b cognoſcitur, cc fore æquale $mm + bb$, & conſequenter $xx + bx + mm + bb \infty o$. quæ æquatio duas reliquas radices reſpicit, ac cum vera radice b concurrit ad formandam æquationem propoſitam.

Præterea, factâ comparatione ultimorum terminorum, habebimus $n^3 \infty bcc$. Vnde ſequitur cc eſſe æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx + bx + \frac{n^3}{b} \infty o$ ſimiliter duas reliquas radices reſpicere, & cum vera b concurrere ad formationem propoſitæ æquationis.

2 Propoſitio.

Pro ſecunda æquatione propoſita formetur rurſus per multiplicationem duarum $xx + bx + cc \infty o$ & $x - b \infty o$ æquatio $x^3 * - bbx - bcc \infty o$. Suppoſito autem bb majori quàm cc, ha-
$\quad + cc$
bebit illa eandem formam atque ſecunda $x^3 * - mmx - n^3 \infty o$, & per conſequens habebunt eandem naturam & conſtitutionem. Fiat igitur collatio, & ex comparatione tertiorum terminorum habebimus $bb - cc \infty mm$. Vnde conſtat, cc eſſe æquale $bb - mm$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx + bx + bb - mm \infty o$ duas reliquas radices concernere. Porrò, ex comparatione duorum poſtremorum terminorum, habebimus $n^3 \infty bcc$, unde ſequitur cc eſſe æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx + bx + \frac{n^3}{b}$ ſimiliter ad duas reliquas reſpicere.

3 Pro-

3 *Propoſitio.*

Ad inveniendam naturam & conſtitutionem tertiæ æquationis propoſitæ, fiat ex duabus hiſce $xx + bx - cc \infty o$ & $x - b \infty o$ æquatio $x^3 * - bbx + bcc \infty o$, eandem habens formam cum
$- cc$
tertia propoſita $x^3 * - mmx + n^3 \infty o$. Vnde & ipſæ eandem habebunt naturam atque conſtitutionem. Fiat ergo collatio, & per comparationem tertiorum terminorum habebimus $bb + cc \infty mm$. Vnde conſtat, cc æquale eſſe $mm - bb$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx + bx + bb - mm \infty o$ ad duas reliquas radices reſpicere.

Præterea, ex comparatione poſtremorum terminorum, habebimus $n^3 \infty bcc$, & per conſequens $cc \infty \frac{n^3}{b}$. Quare, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $xx + bx - \frac{n^3}{b} \infty o$ ſimiliter duas reliquas radices concernet.

CAPVT IV.

De natura & conſtitutione Æquationum Cubicarum ſeu trium dimenſionum, tertio termino carentium.

HÆ æquationes reducuntur ad tres formas ſequentes:

$$x^3 + lxx * - n^3 \infty o.$$
$$x^3 - lxx * - n^3 \infty o.$$
$$x^3 - lxx * + n^3 \infty o.$$

1 *Propoſitio.*

Pro natura & conſtitutione primæ propoſitionis, fiat per multiplicationem harum duarum $xx + cx + bc \infty o$ & $x - b \infty o$ hæc æquatio $x^3 - bxx * - bbc \infty o$. Et ſuppoſitâ c majore
$+ c$
quàm b, habebit ipſa eandem formam cum prima propoſita $x^3 + lxx * - n^3 \infty o$, & per conſequens erunt ejuſdem naturæ. Factâ ergo collatione, habebimus ex comparatione ſecundorum terminorum $c - b \infty l$, hoc eſt, $c \infty l + b$. Vnde conſtat, co-

gnitâ verâ radice b, æquationem $xx \begin{array}{l}+b\\+l\end{array} x + bb + bl \infty 0$ duas reliquas radices reſpicere.

Præterea, ex comparatione duorum ultimorum terminorum, habebitur $n^3 \infty bbc$. unde ſequitur c eſſe æqualem $\frac{n^3}{bb}$; &, cognitâ radice b, æquationem $xx + \frac{n^3}{b} x + \frac{n^3}{b} \infty 0$ duas reliquas radices concernere.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda propoſitione fiat ex multiplicatione harum duarum $xx + cx + bc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^3 \begin{array}{l}-b\\+c\end{array} xx * - bbc \infty 0$. Et ſuppoſitâ b majore quàm c erit ejuſdem formæ cum ſecunda propoſitarum $x^3 - lxx * - n^3 \infty 0$, adeoque erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Factâ igitur collatione, ex comparatione ſecundorum terminorum habebimus $b - c \infty l$. Vnde conſtat, c eſſe æqualem $b - l$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx \begin{array}{l}+b\\-l\end{array} x + bb - bl \infty 0$ duas reliquas radices reſpicere.

Porrò per comparationem poſtremorum terminorum habebimus $n^3 \infty bbc$. Vnde ſequitur c eſſe æqualem $\frac{n^3}{bb}$; &, ſi vera radix fuerit cognita, hanc æquationem $xx + \frac{n^3}{bb} x + \frac{n^3}{b} \infty 0$ duas reliquas radices concernere.

3 *Propoſitio.*

Pro tertia propoſitione formemus ex duabus $xx - cx - bc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l}-c\\-b\end{array} xx * + bbc \infty 0$, quæ habebit eandem formam atque tertia æquationum propoſitarum $x^3 - lxx * + n^3 \infty 0$, & per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Quare factâ collatione, per comparationem ſecundorum terminorum habebimus $c + b \infty l$. Vnde diſcimus, quòd c æquetur $l - b$; &, ſi vera radix b ſit cognita, quòd æquatio $xx \begin{array}{l}-b\\-l\end{array} x - bb - bl \infty 0$ ad duas reliquas radices inveſtigandas referri debeat.

Præ-

Præterea, comparatis ultimis terminis, habebimus $n^3 \infty bbc$, unde ſequitur c æquari $\frac{n^3}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx - \frac{n^3}{bb}x - \frac{n^3}{b} \infty 0$ reliquis duabus inveniendis inſervire.

CAPVT V.

De natura & conſtitutione Æquationum Cubicarum ſeu trium dimenſionum, in quibus omnes termini extant.

ÆQuationes hæ reducuntur ad ſeptem formas ſequentes:

$$x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx - mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx + mmx + n^3 \infty 0.$$
$$x^3 + lxx - mmx + n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0.$$

1 *Propoſitio.*

Ad cognoſcendam naturam & conſtitutionem primæ propoſitionis, fiat ex multiplicatione $xx - cx + dd \infty 0$ per $x - b \infty 0$, æquatio ſequens $x^3 \begin{array}{l} -bxx \\ -c \end{array} \begin{array}{l} +ddx \\ +bc \end{array} - bdd \infty 0$. atque eandem habebunt naturam & conſtitutionem. Factâ ergo comparatione, ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $b + c \infty l$, vel $c \infty l - b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd + bc \infty mm$, hoc eſt, $dd \infty mm + bb - bl$, quoniam c eſt inventa æquari $l - b$. Vnde apparet, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx \begin{array}{l} -lx \\ +b \end{array} + mm + bb - bl \infty 0$ duas reliquas radices reſpicere. Denique ex collatione poſtremorum terminorum habebimus $bdd \infty n^3$. unde conſtat, dd æquari $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx \begin{array}{l} -lx \\ +b \end{array} + \frac{n^3}{b} \infty 0$ duas reliquas radices concernere.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda propoſitarum fiat ex multiplicatione $xx + cx + dd \infty 0$ per $x - b \infty 0$ æquatio hæc $x^3 - bxx - bcx - bdd \infty 0$.
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + c \quad + dd$

& ſuppoſitâ c majore quàm b, & bc majore quàm dd, habebit eandem formam, quàm propoſitio ſecunda $x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty 0$, & conſequenter erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione ſecundorum terminorum habebimus $c - b \infty l$, hoc eſt, $c \infty l + b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd - bc \infty - mm$; hoc eſt, reſtituto valore ipſius c invento, habebitur $dd \infty bl + bb - mm$. Vnde conſtat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx + lx + bb + bl - mm \infty 0$ duabus reliquis radicibus inveſti-
$\quad + b$

gandis eſſe utilem. Denique, ex comparatione poſtremorum terminorum, habebimus $bdd \infty n^3$. Vnde ſequitur dd fore æqualem $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc

$xx + bx + \frac{n^3}{b} \infty 0$ reliquis duabus inſervituram.
$\quad + l$

3 *Propoſitio.*

Pro tertia propoſitione, fiat ex multiplicatione $xx + cx + dd \infty 0$ per $x - b \infty 0$ eadem æquatio $x^3 - bxx - bcx - bdd \infty 0$.
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + c \quad + dd$

Et ſuppoſitâ b majore quàm c, & bc majore quàm dd, erit ejuſdem formæ cum tertiâ propoſitarum $x^3 - lxx - mmx - n^3 \infty 0$, & conſequenter ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $c - b \infty - l$, hoc eſt, $c \infty b - l$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd - bc \infty mm$, hoc eſt, ſubſtituto valore invento ipſius c, erit $dd \infty bb - bl - mm$. Vnde conſtat, quòd, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $xx + bx + bb \infty 0$
$\qquad\qquad\qquad - l \quad - bl$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - mm$

ad duas inveſtigandas reliquas adhiberi poſſit. Denique, ex collatione

latione poſtremorum terminorum, habebitur $bdd \infty n^3$. Vnde ſequitur, dd æquari $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx \begin{matrix}+b\\-l\end{matrix} x + \frac{n^3}{b} \infty 0$ ad duas reliquas quærendas eſſe utilem.

4 *Propoſitio.*

Pro quarta propoſitarum fiat ex multiplicatione $xx+cx+dd \infty 0$ per $x-b \infty 0$ eadem æquatio $x^3 \begin{matrix}-b\\+c\end{matrix} xx \begin{matrix}-bc\\+dd\end{matrix} x - bdd \infty 0$. Et ſuppoſitâ c majore quàm b, & dd majore quàm bc, erunt ejuſdem formæ ac quarta propoſitio $x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty 0$, & conſequenter ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $c-b \infty l$, ſeu $c \infty l+b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $dd-bc \infty mm$, hoc eſt, reſtituto valore ipſius c invento, erit $dd \infty bb+bl+mm$. Vnde conſtat, cognitâ vera radice b, hanc æquationem $xx \begin{matrix}+b\\+l\end{matrix} x + bb+bl+mm \infty 0$ duas reliquas radices reſpicere. Denique ex collatione poſtremorum terminorum habebimus $bdd \infty n^3$. Vnde ſequitur, dd fore æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx \begin{matrix}+b\\+l\end{matrix} x + \frac{n^3}{b} \infty 0$ ad indagandas duas reliquas adhiberi poſſe.

5 *Propoſitio.*

Pro quinta propoſitione fiat ex multiplicatione $xx-cx-dd \infty 0$ per $x-b \infty 0$ æquatio $x^3 \begin{matrix}-c\\-b\end{matrix} xx \begin{matrix}-dd\\+bc\end{matrix} x + ddb \infty 0$. Et ſuppoſito bc majore quàm dd, erit ejuſdem formæ cum quintâ propoſitarum $x^3 - lxx + mmx + n^3 \infty 0$, & conſequenter ejuſdem naturæ & conſtitutionis erunt. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione ſecundorum terminorum, habebimus $l \infty c+b$, vel $c \infty l-b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $bc-dd \infty mm$, hoc eſt, reſtituto valore ipſius c invento, erit $dd \infty bl-bb-mm$. Vnde diſcimus, cognitâ radice verâ b,

æqua-

æquationem hanc $xx \begin{array}{l} -lx \\ +b \end{array} -bl+bb+mm \infty 0$ duabus reliquis inveniendis eſſe uſui. Denique ex collatione poſtremorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd$. Vnde colligitur dd æquari $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ radice verâ b, hanc æquationem $xx \begin{array}{l} -lx \\ +b \end{array} -\frac{n^3}{b} \infty 0$ duabus reliquis inveniendis inſervire.

6 *Propoſitio.*

Pro ſexta propoſitione formetur ex duabus $xx+cx-dd\infty 0$ & $x-b\infty 0$ æquatio $x^3 \begin{array}{l} +cxx \\ -b \end{array} \begin{array}{l} -ddx \\ -bc \end{array} +ddb \infty 0$. Et, ſuppoſitâ c majori quàm b, habebit ipſa eandem formam atque ſexta propoſitarum $x^3+lxx-mmx+n^3\infty 0$, & per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $l \infty c-b$, ſeu $c\infty l+b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum erit $mm \infty dd+bc$, hoc eſt, ſubſtituto valore c invento, habebitur $dd\infty mm-bl-bb$. Vnde conſtat, ſi vera radix b ſit cognita, hanc æquationem $xx \begin{array}{l} +lx \\ +b \end{array} \begin{array}{l} -mm \\ +bl \\ +bb \end{array} \infty 0$, pro duabus reliquis inveniendis uſui futuram. Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $ddb\infty n^3$: & per conſequens $dd\infty \frac{n^3}{b}$; adeoque, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $xx \begin{array}{l} +lx \\ +b \end{array} -\frac{n^3}{b}\infty 0$ ad inveſtigandas duas reliquas utilis erit.

7 *Propoſitio.*

Pro ſeptima propoſitione formetur ex duabus $x-b\infty 0$ & $xx+cx-dd\infty 0$ æquatio $x^3 \begin{array}{l} +cxx \\ -b \end{array} \begin{array}{l} -ddx \\ -bc \end{array} +ddb\infty 0$. Suppoſitâ autem b majore quàm c, habebit ipſa eandem formam cum ſeptima propoſitarum $x^3-lxx-mmx+n^3\infty 0$, & conſequenter erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Factâ igitur comparatione, orietur ex collatione ſecundorum terminorum,

$l\infty b-$

$l \propto b - c$, ſeu $c \propto b - l$. Deinde, conferendo tertios terminos, erit $mm \propto bc + dd$, hoc eſt, ſubſtituendo valorem c inventum, habebitur $dd \propto mm - bb + bl$. Vnde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx \begin{array}{l} +b \\ -l \end{array} x - mm + bb - bl \propto 0$ ad inveniendas duas reliquas inſervire. Poſtremò, collatis ultimis terminis, habebimus $ddb \propto n^3$, unde erit dd æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cùm cognoſcitur vera radix b, hæc æquatio $xx \begin{array}{l} +b \\ -l \end{array} x - \frac{n^3}{b} \propto 0$ ad duas reliquas inveniendas adhiberi poterit.

CAPVT VI.

De natura & conſtitutione Æquationum quatuor dimenſionum, ſecundo & tertio termino carentium.

HVjus generis æquationes ad tres formas ſequentes reducuntur:

$$x^4 * * + n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 * * - n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 * * - n^3x + p^4 \propto 0.$$

I *Propoſitio.*

Pro natura & conſtitutione prioris propoſitionis formemus ex duabus $x^3 + bxx + bbx + c^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hanc æquationem $x^4 * * \begin{array}{l} +c^3 \\ -b^3 \end{array} x - bc^3 \propto 0$. Suppoſito verò c^3 majore quàm b^3, habebit ea eandem formam atque prima propoſitio $x^4 * * + n^3x - p^4 \propto 0$, & per conſequens erit ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo comparatio, & ex collatione quartorum terminorum habebitur $c^3 - b^3 \propto n^3$, hoc eſt, $c^3 \propto n^3 + b^3$. unde cognoſcimus, quando innoteſcit vera radix b, æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx + n^3 + b^3 \propto 0$ ſpectare ad inveſtigationem trium reliquarum radicum.

Præterea, collatis ultimis terminis, fit $p^4 \propto bc^3$: unde ſequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc

$x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b}$ ꝏ o ad tres reliquas inveſtigandas poſſe uſurpari.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda propoſitione fiat ex duabus $x^3 + bxx + bbx + c^3$ ꝏ o & $x - b$ ꝏ o hæc æquatio $x^4 * * \begin{smallmatrix} + c^3 \\ - b^3 \end{smallmatrix} x - bc^3$ ꝏ o. Et, ſi ponatur b^3 major quàm c^3, habebit illa eandem formam atque ſecunda propoſitarum $x^4 * * - n^3 x - p^4$ ꝏ o, & conſequenter erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione quartorum terminorum habebimus $c^3 - b^3$ ꝏ $- n^3$, hoc eſt, c^3 ꝏ $b^3 - n^3$. Vnde cognoſcimus, inventâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + b^3 - n^3$ ꝏ o, ad tres reliquas radices reſpicere. Porrò, comparatis inter ſe terminis ultimis, habebimus p^4 ꝏ bc^3. Vnde ſequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b}$ ꝏ o tres reliquas radices concernere.

3 *Propoſitio.*

Pro tertia propoſitione fiat ex duabus $x^3 + bxx + bbx - c^3$ ꝏ o & $x - b$ ꝏ o æquatio $x^4 * * \begin{smallmatrix} - c^3 \\ - b^3 \end{smallmatrix} x + bc^3$ ꝏ o, & habebit eandem formam atque tertia propoſitarum $x^4 * * - n^3 x + p^4$ ꝏ o, ac per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione quartorum terminorum habebimus $c^3 + b^3$ ꝏ n^3, hoc eſt, c^3 ꝏ $n^3 - b^3$. Vnde conſtat, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx - n^3 + b^3$ ꝏ o ad tres reliquas inveſtigandas adhiberi poſſe. Præterea ex collatione ultimorum habebitur p^4 ꝏ bc^3. Vnde ſequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx - \frac{p^4}{b}$ ꝏ o ad tres reliquas quærendas eſſe utilem.

C A P V T VII.

De natura & conſtitutione Æquationum quatuor dimenſionum, tertio & quarto termino carentium.

Æ Quationes hæ ad ſequentes tres formas reducuntur:

$$x^4 + lx^3 * * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 * * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 * * + p^4 \infty 0.$$

1 *Propoſitio.*

Ad cognoſcendam naturam & conſtitutionem primæ propoſitionis, fiat ex multiplicatione harum duarum $x^3 + cxx + bcx + bbc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 \begin{smallmatrix} + c \\ - b \end{smallmatrix} x^3 * * - b^3 c \infty 0.$ Suppoſitâ vero c majore quàm b, habebit illa eandem formam atque prima propoſitio $x^4 + lx^3 * * - p^4 \infty 0$, ac per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat igitur adæquatio, & comparando ſecundos terminos habebimus $c - b \infty l$, hoc eſt, $c \infty l + b$. Vnde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{smallmatrix} + b \\ + l \end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix} + bl \\ + bb \end{smallmatrix} x + b^3 + bbl \infty 0$ tribus reliquis inveſtigandis inſervire. Deinde, collatis ultimis terminis, habebitur $p^4 \infty b^3 c$. unde ſequitur, c æquari $\frac{p^4}{b^3}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + \frac{p^4}{b^3} xx + \frac{p^4}{bb} x + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas indagandas adhiberi poſſe.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda propoſitione fiat ex duabus $x^3 + cxx + bcx + bbc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 \begin{smallmatrix} + c \\ - b \end{smallmatrix} x^3 * * - b^3 c \infty 0.$ Et ſupponendo b ſuperare ipſam c, habebit illa eandem formam atque ſecunda propoſitio $x^4 - lx^3 * * - p^4 \infty 0$, & conſequenter erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & collatis ſecundis terminorum habebimus $-b + c \infty -l$, hoc eſt,

eſt, $c \infty b - l$. Vnde diſcimus, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + \begin{matrix} b \\ -l \end{matrix}\, xx + \begin{matrix} bb \\ -bl \end{matrix}\, x + b^3 - bbl \infty 0$ ad tres reliquas inveſtigandas uſurpari poſſe. Præterea, comparando poſtremos terminorum, habebimus $p^4 \infty b^3 c$. Vnde ſequitur, c æquari $\frac{p^4}{b^3}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + \frac{p^4}{b^3} xx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ tribus reliquis inſervire.

3 *Propoſitio.*

Pro tertia propoſitione formetur ex duabus $x^3 - cxx - bcx - bbc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio hæc $x^4 \begin{matrix} -c \\ -b \end{matrix}\, x^3 * * + b^3 c \infty 0$ & erit ejuſdem formæ atque tertia propoſitarum $x^4 - lx^3 * * + p^4 \infty 0$, ac per conſequens eandem habebunt naturam & conſtitutionem. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $l \infty c + b$, hoc eſt, $c \infty l - b$. Vnde conſtat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$x^3 \begin{matrix} -l \\ +b \end{matrix}\, xx \begin{matrix} -bl \\ +bb \end{matrix}\, x - bbl + b^3 \infty 0$ tribus reliquis inſervire. Porrò, comparando poſtremos terminos, habebimus $p^4 \infty b^3 c$, & per conſequens $c \infty \frac{p^4}{b^3}$; adeoque, cognitâ verâ radice b, poterit æquatio $x^3 - \frac{p^4}{bb} xx - \frac{p^4}{bb} x - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas radices inveſtigandas adhiberi.

Non operæ pretium duximus meminiſſe æquationum quatuor dimenſionum, in quibus ſecundus & quartus terminus deſunt: quia illæ omnes reducuntur ad Quadratas, ac idcirco earum natura & conſtitutio eodem modo habetur.

CAPVT VIII.

De natura & conſtitutione Æquationum quatuor dimenſionum, ſecundo termino carentium.

ÆQuationes hæ reducuntur ad ſeptem formas ſequentes:

$$x^4 * - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$

1 *Propoſitio.*

Ad cognoſcendam naturam & conſtitutionem primæ propoſitionis, fiat ex multiplicatione duarum $x^3 + bxx - ccx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $\begin{array}{l} x^4 * - ccxx + d^3x - bd^3 \infty 0. \\ \qquad\;\;\; - bb \quad\;\; + bcc \end{array}$ quæ eandem habebit formam atque prima propoſitarum $x^4 * - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione tertiorum terminorum habebimus $mm \infty cc + bb$, hoc eſt, $cc \infty mm - bb$. Deinde, comparando terminos quartos, erit $n^3 \infty d^3 + bcc$, hoc eſt, reſtituendo valorem cc inventum, habebitur $d^3 \infty n^3 + b^3 - bmm$. Vnde comperimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $\begin{array}{l} x^3 + bxx + n^3 \infty 0 \\ \;\;\; - m \quad\; + b^3 \\ \qquad\quad\;\; - bmm \end{array}$ tribus reliquis indagandis inſervire.

Præterea, conferendo inter ſe terminos ultimos, habebimus $p^4 \infty bd^3$. Vnde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, inventâ verâ radice b, hanc æquationem $\begin{array}{l} x^3 + bxx - mmx + \frac{p^4}{b} \infty 0 \\ \qquad\qquad + bb \end{array}$ ad tres reliquas quærendas adhiberi poſſe.

2. *Propoſitio.*

Pro ſecunda fiat ex multiplicatione $x^3 + bxx + ccx + d^3 \infty 0$ per $x - b \infty 0$ hæc æquatio
$$\begin{array}{l} x^4 * + ccxx + d^3x - d^3b \infty 0. \\ \quad\;\; - bb \quad\; - ccb \end{array}$$
Suppoſito verò cc majore quàm bb, & ccb majore quàm d^3, habebit illa eandem formam cum ſecunda propoſitarum $x^4 * + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat igitur adæquatio, & ex comparatione tertiorum terminorum habebimus $mm \infty cc - bb$, hoc eſt, $cc \infty mm + bb$. Deinde, collatis quartis terminis, erit $-cb^3 + d^3 \infty -n^3$, hoc eſt, reſtituendo valorem cc inventum, habebitur $d^3 \infty bmm + b^3 - n^3$. Vnde diſcimus, cognitâ verâ radice b, æquationem
$$\begin{array}{l} x^3 + bxx + mmx + bmm \infty 0, \\ \quad\;\; + bb \quad\; + b^3 \\ \qquad\qquad\quad - n^3 \end{array}$$
tribus reliquis inveſtigandis inſervire.

Præterea, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty d^3 b$. unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc
$$\begin{array}{l} x^3 + bxx + mmx + \frac{p^4}{b} \infty 0 \\ \qquad\qquad + bb \end{array}$$
ad tres reliquas indagandas poſſe uſurpari.

3 *Propoſitio.*

Pro tertia, fiat ex duabus his $x^3 + bxx + ccx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio
$$\begin{array}{l} x^4 * + ccxx + d^3x - d^3b \infty 0. \\ \quad\;\; - bb \quad\; - ccb \end{array}$$
Et, ſuppoſito bb majore quàm cc, & ccb majore quàm d^3, habebit ipſa eandem formam atque tertia propoſitio $x^4 * - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Vnde factâ adæquatione, ex collatione tertiorum terminorum habebimus $-mm \infty -bb + cc$, hoc eſt, $cc \infty bb - mm$. Deinde, collatis quartis terminis, habebimus $-n^3 \infty -ccb + d^3$, hoc eſt, ſubſtituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty b^3 + bmm - n^3$. unde patet, ſi cognita ſit radix vera b, hanc æquationem
$$\begin{array}{l} x^3 + bxx + bbx + b^3 \infty 0 \\ \qquad\qquad - m^2 \;\; + bm^2 \\ \qquad\qquad\qquad\;\; - n^3 \end{array}$$

tri-

tribus reliquis inveſtigandis inſervire. Poſtremo, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bd^3$, ac proinde $d^3 \infty \frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, poterit æquatio $x^3 + bxx + \begin{array}{l}bbx\\-mm\end{array} + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad reliquas tres inveſtigandas uſurpari.

4 *Propoſitio.*

Pro quarta propoſitarum formemus ex duabus $x^3 - bxx + ccx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem $x^4 * \begin{array}{l}+ccxx\\-bb\end{array} \begin{array}{l}+d^3x\\-ccb\end{array} - d^3b \infty 0$. Et ſuppoſito cc majore quàm b, ac d^3 majore quàm ccb, habebit ipſa eandem formam atque quarta propoſitio $x^4 * + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $mm \infty cc - bb$, hoc eſt, $cc \infty mm + bb$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \infty d^3 - ccb$, hoc eſt, reſtituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty b^3 + bmm + n^3$. Vnde diſcimus, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + bxx \begin{array}{l}+mmx\\+bb\end{array} \begin{array}{l}+b^3\\+bmm\\+n^3\end{array} \infty 0$ tribus reliquis quærendis inſervire. Denique, collatis ultimis terminis, erit $d^3 b \infty p^4$; & per conſequens $d^3 \infty \frac{p^4}{b}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $x^3 + bxx \begin{array}{l}+mmx\\+bb\end{array} + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad reliquas tres indagandas erit adhibenda.

5 *Propoſitio.*

Pro quinta propoſitione, fiat ex duabus $x^3 + bxx - ccx - d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 * \begin{array}{l}-ccxx\\-bb\end{array} \begin{array}{l}-d^3x\\+bcc\end{array} + d^3b \infty 0$. Et ſuppoſito bcc majore quàm d^3, habebit ipſa eandem formam atque quinta propoſitarum $x^4 * - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat jam adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $mm \infty cc + bb$, hoc

hoc eſt, $cc \propto mm - bb$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \propto bcc - d^3$; ideoque, reſtituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \propto bmm - b^3 - n^3$. Vnde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x^3 + bxx \begin{array}{l} - mmx \\ + bb \end{array} \begin{array}{l} - bmm \\ + b^3 \\ + n^3 \end{array} \propto 0$$

reliquis tribus quærendis inſervituram. Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus $d^3 b \propto p^4$. Vnde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x^3 + bxx \begin{array}{l} - mmx \\ + bb \end{array} - \frac{p^4}{b} \propto 0$$

ad tres reliquas inveſtigandas poſſe adhiberi.

6 *Propoſitio.*

Pro ſexta propoſitione formemus ex duabus $x^3 + bxx + ccx - d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hanc æquationem

$$x^4 * \begin{array}{l} + ccxx \\ - bb \end{array} \begin{array}{l} - d^3 x \\ - ccb \end{array} + d^3 . b \propto 0.$$

& ſupponendo cc majus quàm bb, habebit ipſa eandem formam cum ſexta propoſitarum $x^4 * + mmxx - n^3 x + p^4 \propto 0$, ac per conſequens erit utraque ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio & per comparationem ſecundorum terminorum habebimus $mm \propto cc - bb$, hoc eſt, $cc \propto mm + bb$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebimus $n^3 \propto d^3 + bcc$, hoc eſt, reſtituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \propto n^3 - bmm - b^3$. Vnde patet, datâ verâ radice b, æquationem

$$x^3 + bxx \begin{array}{l} + mmx \\ + bb \end{array} \begin{array}{l} - n^3 \\ + bmm \\ + b^3 \end{array} \propto 0$$

ad trium reliquarum inveſtigationem poſſe uſurpari.

Poſtremò, comparando ultimos terminos, erit $p^4 \propto d^3 b$. unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x^3 + bxx \begin{array}{l} + mmx \\ + bb \end{array} - \frac{p^4}{b} \propto 0$$

ad reliquas tres quærendas eſſe adhibendam.

7 *Propoſitio.*

Pro ſeptima propoſitarum fiat ex duabus $x^3+bxx+ccx-d^3 \propto 0$ & $x-b \propto 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{l} x^4 * + ccxx - d^3x + bd^3 \propto 0. \\ \qquad\;\; - bb \quad\;\; - bcc \end{array}$$

Et ſuppoſito bb majore quàm cc, habebit ipſa eandem formam atque ſeptima propoſitio $x^4 * - mmxx - n^3x + p^4 \propto 0$, & per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $-mm \propto -bb + cc$, hoc eſt, $cc \propto bb - mm$. Deinde, collatis quartis terminis, erit $n^3 \propto d^3 + bcc$, hoc eſt, reſtituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \propto n^3 - b^3 + bmm$. unde conſtat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{l} x^3 + bxx + bbx - n^3 \propto 0 \\ \qquad\qquad\;\; - mm \;\; + b^3 \\ \qquad\qquad\qquad\;\;\; - bmm \end{array}$$

ad reliquas tres inveſtigandas utilem eſſe. Poſtremò, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto bd^3$. unde diſcimus, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{l} x^3 + bxx + b^3x - \frac{p^4}{b} \propto 0 \\ \qquad\qquad\;\; - m^2b \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas adhiberi poſſe.

CAPVT IX.

De natura & conſtitutione Æquationum quatuor dimenſionum, quarto termino carentium.

HÆ æquationes reducuntur omnes ad ſeptem ſequentes formulas:

$$x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx * - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx * - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 - lx^3 + mmxx * + p^4 \propto 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx * + p^4 \propto 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx * + p^4 \propto 0.$$

1 *Propoſitio.*

Ad inveſtigandam naturam & conſtitutionem primæ propoſitionis, formemus ex duabus $x^3 - cxx + ddx + bdd \propto 0$ & $x - b \propto 0$ æquationem hanc

$$\begin{array}{llll} x^4 & - c x^3 & + ddxx * & - bbdd \propto 0; \\ & - b & + bc & \end{array}$$

habebitque ipſa eandem formam atque prima propoſitio $x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \propto 0$, & per conſequens duæ illæ æquationes ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat jam adæquatio, & ex comparatione ſecundorum terminorum habebimus $l \propto c - b$, ſeu $c \propto l + b$. Deinde, comparando tertios terminos, erit $mm \propto dd + bc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, habebitur $dd \propto mm - bl - bb$. unde conſtat, ſi cognoſcitur verâ radix b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & - lxx & + mmx & + bmm & \propto 0 \\ & - b & - bl & - bbl & \\ & & - bb & - b^3 & \end{array}$$

ad reliquas tres inveſtigandas inſervire.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda propoſitione formemus ex duabus $x^3 + cxx + ddx - bdd \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^4 & + cx^3 & + ddxx & * - ddbb \propto 0. \\ & - b & - bc & \end{array}$$

Suppoſitâ verò c majore quàm b, & bc majore quam dd, habebit illa eandem formam atque ſecunda propoſitarum $x^4 + lx^3 - mmxx * - p^4 \propto 0$, & per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $l \propto c - b$, hoc eſt, $c \propto l + b$. Deinde, comparatis tertiis terminis, erit $- mm \propto dd - bc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, habebitur $dd \propto bl + bb - mm$. Vnde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & + lxx & + blx & + bbl & \propto 0 \\ & + b & + bb & + b^3 & \\ & & - m^2 & - bm^2 & \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas poſſe adhiberi.

Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto bbdd$. unde ſequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; &, cùm cognoſcitur vera radix

radix b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l}+l\\+b\end{array} xx \begin{array}{l}+bl\\+bb\\-mm\end{array} x + \frac{p^4}{b} \infty\, 0$ tres reliquas radices concernere.

3 *Propoſitio.*

Pro tertia propoſitione, fiat ex duabus $x^3+cxx+ddx+bdd \infty\, 0$ & $x-b \infty\, 0$ hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l}+c\\-b\end{array} x^3 \begin{array}{l}+dd\\-bc\end{array} xx * -bbdd \infty\, 0$. Suppoſitis autem b majore quàm c, & bc majore quàm dd, habebit ipſa eandem formam atque tertia propoſitio $x^4-lx^3-mmxx*-p^4 \infty\, 0$, & per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat jam adæquatio, & comparando ſecundos terminos habebimus $-l \infty\, c-b$, hoc eſt, $c \infty\, b-l$. Deinde, conferendo tertios terminos, erit $-mm \infty\, dd-bc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, habebitur $dd \infty\, bb+bl-mm$. Vnde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l}+b\\-l\end{array} xx \begin{array}{l}+bb\\+bl\\-m^2\end{array} x \begin{array}{l}+bbl\\+b^3\\-bm^2\end{array} \infty\, 0$ tribus reliquis inſervire.

Poſtremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty\, bbdd$. unde ſequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l}+b\\-l\end{array} xx \begin{array}{l}+bb\\+bl\\-mm\end{array} x + \frac{p^4}{b}$ pro tribus reliquis uſurpari.

4 *Propoſitio.*

Pro quarta propoſitione fiat ex duabus $x^3+cxx+ddx+bdd \infty\, 0$ & $x-b \infty\, 0$ hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l}+c\\-b\end{array} x \begin{array}{l}+dd\\-bc\end{array} xx * -bbdd \infty\, 0$. Suppoſitis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, habebit ipſa eandem formam atque tertia propoſitio $x^4+lx^3+mmxx*-p^4 \infty\, 0$, ac per conſequens duæ illæ æquationes eandem habebunt naturam & conſtitutionem. Fiat jam adæquatio, comparatisque ſecundis terminis habebimus $l \infty\, c-b$, hoc eſt, $c \infty\, l+b$. Deinde,

de, conferendo rertios terminos, habebimus $mm \infty dd - bc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm + bl + bb$. unde conſtat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + mmx & + bmm & \infty\ 0 \\ + bxx & + blx & + bbl & \\ & + bbx & + b^3 & \end{array}$$

ad tres reliquas adhiberi.

Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bbdd$. unde ſequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + mmx & + \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ + lxx & + blx & & \\ & + bbx & & \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas eſſe utilem.

5 *Propoſitio.*

Pro quinta propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - ddx - bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 - cx^3 & - ddxx & * + bbdd & \infty\ 0. \\ - bx^3 & + bcxx & & \end{array}$$

Et ſupponendo bc majus quàm dd, erit ipſa ejuſdem formæ cum quinta propoſitione $x^4 - lx^3 + mmxx * + p^4 \infty 0$, ac per conſequens eandem habebunt naturam & conſtitutionem. Fiat jam adæquatio, & comparatis ſecundis terminis, habebimus $l \infty b + c$, hoc eſt, $c \infty l - b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \infty bc - dd$, hoc eſt, reſtituendo valorem inventum c, erit $dd \infty bl - bb - mm$. unde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & - blx & - bbl & \infty\ 0 \\ + bxx & + bbx & + bmm & \\ & + mmx & + b^3 & \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas adhiberi poſſe.

Poſtremò, comparando ultimos terminos, habebimus $bbdd \infty p^4$, ac per conſequens $dd \infty \frac{p^4}{bb}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & - blx & - \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ + bxx & + bbx & & \\ & + mmx & & \end{array}$$

pro tribus reliquis inveſtigandis inſervire poterit.

6 *Propoſitio.*

Pro ſexta propoſitarum, fiat ex duabus $x^3 + cxx - ddx - bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{llllll} x^4 & +cx^3 & -ddxx & * & +bbdd & \infty\, 0. \\ & -b & -bc & & & \end{array}$$

Supponendo autem c majorem quàm b, habebit ipſa eandem formam atque ſexta propoſitio, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando ſecundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc eſt, $c \infty l + b$. Deinde, ex collatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm - bl - bb$. Vnde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & +lxx & -mmx & -bmm & \infty\, 0 \\ & +b & +bl & +bbl & \\ & & +bb & +b^3 & \end{array}$$

tres reliquas radices reſpicere.

Poſtremò, ex comparatione ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \infty bbdd$, ac per conſequens $dd \infty \frac{p^4}{bb}$; adeoque, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^3 & +lxx & -mmx & -\frac{p^4}{b} & \infty\, 0 \\ & +b & +bl & & \\ & & +bb & & \end{array}$$

ad tres reliquas inveſtigandas erit adhibenda.

7 *Propoſitio.*

Pro ſeptima propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx - bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llllll} x^4 & +cx^3 & -ddxx & * & +bbdd & \infty\, 0. \\ & -b & -bc & & & \end{array}$$

Suppoſitâ autem b majore quàm c, habebit ipſa eandem formam atque ſeptima propoſitarum $x^4 - lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem ſecundorum terminorum habebimus $c - b \infty - l$, hoc eſt, $c \infty b - l$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty dd + bc$; hoc eſt, ſubſtituto valore c invento, erit $dd \infty mm - bb + bl$. unde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & +bxx & -mmx & -bmm & \infty\, 0 \\ & -l & -bl & -bbl & \\ & & +bb & +b^3 & \end{array}$$

tribus

tribus reliquis inſervire. Denique, comparando poſtremos terminos, habebimus $p^4 \infty bbdd$; ac per conſequens $dd \infty \frac{p^4}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & - mmx & - \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ \quad\ - l & - bl & & \\ & + bb & & \end{array}$$

ad tres reliquas erit referenda.

Caput X.

De natura & conſtitutione Æquationum quatuor dimenſionum, tertio termino carentium.

Reducuntur autem hæ æquationes ad ſeptem ſequentes formulas:

$$x^4 - lx^3 * + n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 * - n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 * - n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 * + n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 * + n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 * - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 * - n^3x + p^4 \infty 0.$$

I *Propoſitio.*

Pro natura & conſtitutione primæ propoſitionis, formemus, ex duabus $x^3 - cxx - bcx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^4 - cx^3 & * + d^3x & - bd^3 & \infty\ 0, \\ \quad\ - b & \quad + bbc & & \end{array}$$

& habebit ipſa eandem formam atque prima propoſitio $x^4 - lx^3 * + n\ x - p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex comparatione ſecundorum terminorum habebimus $l \infty c + b$, hoc eſt, $c \infty l - b$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \infty d^3 + bbc$, hoc eſt, reſtituendo valorem inventum c, erit $d^3 \infty n^3 - bbl + b^3$. Vnde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & - blx & + n^3 & \infty\ 0 \\ \quad\ + b & + bb & + b^3 & \\ & & - bbl & \end{array}$$

ad tres reliquas quærendas adhiberi poſſe. Denique, comparando ulti-

ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty b d^3$. unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & -blx & +\frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & +b & +bb & \end{array}$$

ad reliquas tres erit referenda.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +cx^3 & * & +d^3x & -d^3b \infty 0. \\ & -b & & -bbc & \end{array}$$

Suppoſitis autem c majore quàm b, & bbc majore quàm d^3, habebit ipſa eandem formam atque ſecunda propoſitio $x^4 + lx^3 * - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem ſecundorum terminorum habebimus, $l \infty c - b$, hoc eſt, $c \infty l + b$. Deinde, collatis quartis terminis, habebimus $d^3 - bbc \infty - n^3$, hoc eſt, ſubſtituendo valorem c inventum, erit $d^3 \infty bbl + b^3 - n^3$. Vnde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & +lxx & +blx & +bbl \infty 0 \\ & +b & +bb & +b^3 \\ & & & -n^3 \end{array}$$

tribus reliquis inſervire. Poſtremò, per comparationem ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \infty bd^3$, ac per conſequens $d^3 \infty \frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 & +lxx & +blx & +\frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & +b & +bb & \end{array}$$

ad tres reliquas inveſtigandas erit utilis.

3 *Propoſitio.*

Pro tertia propoſitione fiat ex duabus, $x + cxx + bcx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +cx^3 & * & +d^3x & -d^3b \infty 0. \\ & -b & & -bbc & \end{array}$$

Suppoſitis autem b majore quàm c, & bbc majore quàm d^3, habebit ipſa eandem formam atque tertia propoſitio $x^4 + lx \; * - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat itaque earum adæquatio, & per comparationem ſecundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, hoc eſt, $c \infty l + b$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $d^3 - bbc \infty - n^3$, hoc eſt,

reſti-

reſtituendo valorem c inventum, erit $d^3 \infty lbb + b^3 - n^3$. Vnde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$x^3 + l\,xx + blx + lbb \infty o$ ad reliquas tres quærendas eſſe uti-
$\quad + b \quad\; + bb \quad + b^3$
$\qquad\qquad\qquad - n^3$

lem. Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty d^3 b$, ac per conſequens $d^3 \infty \frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$x^3 + l\,xx + blx + \frac{p^4}{b} \infty o$ ad tres reliquas erit referenda.
$\quad + b \quad\; + bb$

4. Propoſitio.

Pro quarta propoſitione fiat ex duabus $x^3 + cxx + bcx + d^3 \infty o$ & $x - b \infty o$ hæc æquatio $x^4 + c\,x^3 * + d^3 x - d^3 b \infty o$. Sup-
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - b \qquad - bbc$

poſitis autem c majore quàm b, & d^3 majore quàm bbc, habebit ipſa eandem formam atque quarta propoſitarum $x^4 + lx^3 * + n^3 x - p^4 \infty o$, ac per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, collatisque ſecundis terminis habebimus $l \infty c - b$, hoc eſt, $c \infty b + l$. Deinde, comparando quartos terminos, habebimus $n^3 \infty d^3 - bbc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \infty n^3 + b^3 + bbl$. Vnde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$x^3 + bxx + bbx + n^3 \infty o$ ad tres reliquas eſſe referendam.
$\quad + l \quad\; + bl \quad + b^3$
$\qquad\qquad\qquad + bbl$

Denique, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty d^3 b$, ac per conſequens $d^3 \infty \frac{p^4}{b}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \infty o$ tribus reliquis inſerviet.
$\qquad\qquad + l \quad\; + bl$

5 Propoſitio.

Pro quinta propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - bcx - d^3 \infty o$ & $x - b \infty o$, hæc æquatio $x^4 - c\,x^3 * - d^3 x + bd^3 \infty o$. ſuppo-
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - b \qquad + bbc$

nendo autem bbc majus quàm d^3, habebit ipſa eandem formam

quinta

atque quinta propoſitio $x^4 - lx^3 * + n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque ſecundos terminos habebimus $l \infty c + b$, hoc eſt, $c \infty l - b$. Deinde, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \infty bbc - d^3$, hoc eſt, $d^3 \infty bbl - b^3 - n^3$, ſubſtituto nempe valore c invento. Vnde patet, cùm innoteſcit vera radix b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & -lxx & -blx & -bbl & \infty 0 \\ & +b & +bb & +b^3 & \\ & & & +n^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inſervire.

Poſtremò, ex collatione ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \infty d^3 b$. unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & -lxx & -blx & -\frac{p^4}{b} & \infty 0 \\ & +b & +bb & & \end{array}$$

ad tres reliquas inveſtigandas eſſe adhibendam.

6 *Propoſitio.*

Pro ſexta propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx - d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 & -cx^3 \; * & +d^3 x & +bd^3 \infty 0. \\ & -b & -bbc & \end{array}$$

Suppoſitâ autem c majore quàm b, habebit ipſa eandem formam atque ſexta propoſitarum $x^4 + lx^3 * - n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque ſecundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc eſt, $c \infty l + b$. Deinde, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \infty d^3 + bbc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \infty n^3 - bbl - b^3$. Vnde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & +lxx & +blx & -n^3 & \infty 0 \\ & +b & +bb & +bbl & \\ & & & +b^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inſervire.

Denique, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bd^3$. unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & +lxx & +blx & -\frac{p^4}{b} & \infty 0 \\ & +b & +bb & & \end{array}$$

ad reliquas tres eſſe referendam.

7 *Propoſitio.*

Pro ſeptima propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx - d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 + c\,x^3 & * & - d^3\,x + b\,d^3 \infty 0. \\ \quad\; - b & & - bbc & \end{array}$$

Suppo-nendo autem b majorem quàm c, habebit ipſa eandem formam atque ſeptima propoſitarum $x^4 - lx^3 * - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiàt ergo adæquatio, comparandoque ſecundos terminos habebimus $c - b \infty - l$, hoc eſt, $c \infty b - l$. Deinde, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \infty d^3 + bbc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \infty n^3 - b^3 + bbl$. unde ſequitur, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + b\,xx & + bb\,x & - n^3 & \infty 0 \\ \quad\;\; - l & - bl & - bbl & \\ & & + b^3 & \end{array}$$

reliquis tribus inſervire.

Poſtremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty d^3\,b$. unde conſtat, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc

$$\begin{array}{lll} x^3 + b\,xx & + bb\,x & - \frac{p^4}{b} \infty 0 \\ \quad\;\; - l & - bl & \end{array}$$

ad tres reliquas eſſe referendam.

Capvt XI.

De natura & conſtitutione Æquationum quatuor dimenſionum, in quibus nullus terminus deeſt.

Reducuntur hæ æquationes omnes ad quindecim ſequentes formas:

$$x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$$

$x^4 -$

$$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$$

1 *Propoſitio.*

Pro natura & conſtitutione primæ propoſitionis, dignoſcendâ fiat ex duabus hiſce, $x^3 - cxx + ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 - cx^3 & + ddxx & - f^3x & + bf^3 \infty 0, \\ - b & + bc & - bdd & \end{array}$$

quæ eandem habebit formam atque prima propoſitarum $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando ſecundos terminos habebimus $l \infty c + b$, hoc eſt, $c \infty l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm - bl + bb$. Tum per collationem quartorum terminorum habebimus $n^3 \infty f^3 + bdd$, hoc eſt, ſubſtituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty n^3 + bbl - bmm - b^3$. Vnde conſtat, cùm innoteſcit vera radix b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & + mmx & - n^3 & \infty 0 \\ + b & + bb & - bbl. & \\ & - bl & + bm^2 & \\ & & + b^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inſervire.

Poſtremò, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & + mmx & - \frac{p^4}{b} & \infty 0 \\ + b & + bb & & \\ & - bl & & \end{array}$$

ad tres reliquas eſſe referendam.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 - cx^3 & - ddxx & - f^3x & + bf^3 \infty 0. \\ - b & + bc & + bdd & \end{array}$$

Suppoſitis autem bc majore quàm dd, & bdd majore quàm f^3, habebit ipſa eandem formam atque ſecunda propoſitarum $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty o$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio & per comparationem ſecundorum terminorum habebimus $l \infty c + b$, hoc eſt, $c \infty l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty bc - dd$, hoc eſt, ſubſtituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty bl - bb - mm$. Tum ex collatione quartorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd - f^3$, hoc eſt, reſtituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty bbl - b^3 - bmm - n^3$. Vnde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & +n^3 \infty o \\ & +b & +bb & +b^3 \\ & & -bl & +bmm \\ & & & -bbl \end{array}$$

tribus reliquis inſervire.

Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & -\frac{p^4}{b} \infty o \\ & +b & +bb & \\ & & -bl & \end{array}$$

ad tres reliquas inveſtigandas poſſe adhiberi.

3 *Propoſitio.*

Pro tertia propoſitione fiat ex duabus $x^3 - cxx - ddx - f^3 \infty o$, & $x - b \infty o$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -cx^3 & -ddxx & -f^3x & +bf^3 \infty o. \\ & -b & +bc & +bdd & \end{array}$$

Suppoſitis autem dd majore quàm bc, & f^3 majore quàm bdd, habebit ipſa eandem formam atque tertia propoſitio $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty o$; ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem ſecundorum terminorum habebimus $c \infty l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $bc - dd \infty - mm$, hoc eſt, ſubſtituto valore c invento, erit $dd \infty bl + mm - bb$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebimus $bdd - f^3 \infty - n^3$, hoc eſt, reſtituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty n^3 + bbl + bmm - b^3$. Vnde conſtat, cognitâ verâ radice b, hanc

æqua-

æquationem
$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & -blx & -n^3 \infty 0 \\ & +b & -mm & -bbl \\ & & +bb & -bm^2 \\ & & & +b^3 \end{array}$$
tribus reliquis inſervire.

Poſtremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & -mmx & -\frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & +b & -bl & \\ & & +bb & \end{array}$$
ad tres reliquas eſſe referendam.

4 *Propoſitio.*

Pro quarta propoſitione fiat ex duabus $x^3 - cxx - ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio
$$\begin{array}{lllll} x^4 & -cx^3 & -ddxx & -f^3x & +bf^3 \infty 0. \\ & -b & +bc & +bdd & \end{array}$$
Suppoſitis autem dd majore quàm bc, & bdd majore quàm f^3, habebit ipſa eandem formam atque quarta propoſitio $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando ſecundos terminos habebimus $c \infty l - b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebimus $bc - dd \infty - mm$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm + bl - bb$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd - f^3$, hoc eſt, ſubſtituto valore dd invento, erit $f^3 \infty bmm + bbl - b^3 - n^3$. Vnde conſtat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & -mmx & -bmm \infty 0 \\ +b & -bl & -bbl & \\ & +bb & +b^3 & \\ & & +n^3 & \end{array}$$
tribus reliquis inſervire.

Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus, $p^4 \infty bf^3$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & -mmx & -\frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & +b & -bl & \\ & & +bb & \end{array}$$
ad tres reliquas eſſe referendam.

5 *Propoſitio.*

Pro quinta propoſitione, formemus ex duabus, $x^3 + cxx + ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b$, hanc æquationem
$$\begin{array}{lllll} x^4 + cx^3 & + ddxx & - f^3x & & \\ - b & - bc & - bdd & + bf^3 & \infty\ 0. \end{array}$$
Suppoſitis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, habebit ipſa eandem formam atque quinta propoſitarum $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando ſecundos terminos, habebimus $c \infty l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis habebimus $mm \infty dd - bc$, hoc eſt, ſubſtituto valore c invento, erit $dd \infty mm - bl - bb$. Tum, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \infty f^3 + ddb$, hoc eſt, reſtituto valore dd invento, erit $f^3 \infty n^3 + mmb - bbl - b^3$. Vnde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + mmx & - n^3 & \infty\ 0 \\ + b & - bl & - m^2b & \\ & - bb & + bbl & \\ & & + b^3. & \end{array}$$
tribus reliquis inſervire.

Denique, ex comparatione ultimorum terminorum, habebimus $bf^3 \infty p^4$, ac per conſequens $f^3 \infty \frac{p^4}{b}$. unde conſtat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + mmx & - \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ + b & - bl & & \\ & - bb & & \end{array}$$
ad tres reliquas eſſe referendam.

6 *Propoſitio.*

Pro ſexta propoſitione fiat ex duabus $x^3 + cxx + ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio
$$\begin{array}{llll} x^4 - bx^3 & - bcxx & - bddx & + bf^3 \infty 0. \\ + c & + dd & - f^3 & \end{array}$$
Suppoſitis autem c majore quàm b, & bc majore quàm dd, habebit ipſa eandem formam atque ſexta propoſitio $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem ſecundorum terminorum habebimus $c \infty l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \infty - mm$, hoc eſt, ſubſtituto valore c in-

invento, erit $dd \infty bl + bb - mm$. Tum, comparando quartos terminos, habebitur $n^3 \infty f^3 + bdd$, hoc eſt, reſtituto valore dd invento, erit $f^3 \infty n^3 + bmm - b^3 - bbl$. Vnde conſtat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x^3 \begin{array}{l} +l \\ +b \end{array} xx \begin{array}{l} +bl \\ +bb \\ -mm \end{array} x \begin{array}{l} -n^3 \\ -bmm \\ +bbl \\ +b^3 \end{array} \infty o$$

tribus reliquis inſervire.

Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x^3 \begin{array}{l} +l \\ +b \end{array} xx \begin{array}{l} +bl \\ +bb \\ -mm \end{array} x - \frac{p^4}{b} \infty o$$

ad tres reliquas eſſe referendam.

7 *Propoſitio.*

Pro ſeptima propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx - f^3 \infty o$ & $x - b \infty o$, hæc æquatio

$$x^4 \begin{array}{l} +c \\ -b \end{array} x^3 \begin{array}{l} -dd \\ -bc \end{array} xx \begin{array}{l} -f^3 \\ +bdd \end{array} x + bf^3 \infty o.$$

Suppoſitis autem c majore quàm b, & bdd majore quàm f^3, habebit ipſa eandem formam atque ſeptima propoſitio $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty o$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando ſecundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc eſt, $c \infty b + l$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \infty dd + bc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm - bb - bl$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd - f^3$, hoc eſt, ſubſtituto valore dd invento, erit $f^3 \infty bmm - b^3 - bbl - n^3$. Vnde ſequitur, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc

$$x^3 \begin{array}{l} +b \\ +l \end{array} xx \begin{array}{l} -mm \\ +bb \\ +bl \end{array} x \begin{array}{l} -bmm \\ +b^3 \\ +bbl \\ +n^3 \end{array} \infty o$$

reliquis tribus inſervire.

Poſtremò, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquatio-

tionem $x^3 + bxx - mmx - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad reliquas tres eſſe refe-

$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & -mmx & -\frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & +l & +bb & \\ & & +bl & \end{array}$$

rendam.

8 *Propoſitio.*

Pro octava propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx + ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 - cx^3 + ddxx + f^3x - f^3b \infty 0$.

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -cx^3 & +ddxx & +f^3x & -f^3b \infty 0 \\ & -b & +bc & & -bdd \end{array}$$

Suppoſito autem bdd majore quàm f^3, habebit ipſa eandem formam atque octava propoſitio $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando ſecundos terminos habebimus $l \infty c + b$, hoc eſt, $c \infty l - b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \infty dd + bc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm - bl + bb$. Tum ex collatione quartorum terminorum habebitur $f^3 - bdd \infty - n^3$, hoc eſt, ſubſtituto valore dd invento, erit $f^3 \infty bmm - bbl - n^3 + b^3$. Vnde conſtat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & +bmm \infty 0 \\ & +b & +bb & +b^3 \\ & & -bl & -bbl \\ & & & -n^3 \end{array}$$

tribus reliquis inſervire..

Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$, unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & +\frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & +b & +bb & \\ & & -bl & \end{array}$$

ad tres reliquas eſſe referendam.

9 *Propoſitio.*

Pro nona propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx + ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 - cx^3 + d^3xx + f^3x - f^3b \infty 0$.

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -cx^3 & +d^3xx & +f^3x & -f^3b \infty 0 \\ & -b & +bc & -bdd & \end{array}$$

Suppoſito verò f^3 majore quàm bdd, erit ipſa ejuſdem formæ cum propoſitione nona $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per con-

conſequens habebunt duæ illæ æquationes eandem naturam & conſtitutionem. Fiat ergo adæquatio, unde comparando ſecundos terminos habebimus $l \propto b + c$, hoc eſt, $c \propto l - b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebitur $mm \propto dd + bc$, hoc eſt, ſubrogato valore c invento, erit $dd \propto mm + bb - bl$. Tum collatis quartis terminis, fiet $n^3 \propto f^3 - bdd$, hoc eſt, ſubſtituto valore dd invento, erit $f^3 \propto n^3 + b^3 + bmm - bbl$. Vnde conſtat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & +n^3 \\ & +b & +bb & +bmm \\ & & -bl & +b^3 \\ & & & -bbl \end{array} \propto 0$$

tribus reliquis inſervire.

Præterea, comparatis ultimis terminis, habebimus $f^3 b \propto p^4$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & +\frac{p^4}{b} \\ & +b & +bb & \\ & & -bl & \end{array} \propto 0$$

ad tres reliquas eſſe referendam.

10. Propoſitio.

Pro decima propoſitione fiat ex duabus hiſce $x^3 + cxx + ddx + f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +cx^3 & +ddxx & +f^3x & -f^3b \\ & -b & -bc & -bd^2 & \end{array} \propto 0.$$

Suppoſitis autem b majore quàm c, & bc majore quàm dd, nec non bdd majore quàm f^3, habebit ipſa eandem formam atque decima propoſitio $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparatiſque ſecundis terminis habebimus $c - b \propto -l$, hoc eſt, $c \propto b - l$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \propto -mm$, hoc eſt, ſubſtituto valore c invento, erit $dd \propto bb - bl - mm$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebitur $f^3 - bd^3 \propto n^3$, hoc eſt, reſtituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \propto b^3 - bbl - bmm - n^3$. Vnde conſtat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & +bbx & +b^3 \\ & -l & -bl & -bbl \\ & & -m^2 & -bmm \\ & & & -n^3 \end{array} \propto 0$$

tribus reliquis inſervire.

Denique, comparatis ultimis terminis, habebitur $p^4 \propto bf^3$. unde conſtat, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + \frac{p^4}{b} & \propto 0 \\ - l\,xx & - blx & & \\ & + mmx & & \end{array}$$

ad tres reliquas eſſe referendam.

11 Propoſitio.

Pro undecima propoſitione fiat ex duabus $x^3 + cxx - ddx - f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 + cx^4 & - ddxx & + f^3x & - bf^3 & \propto 0. \\ - b & - bc & + ddb & & \end{array}$$

Suppoſitâ autem b majore quàm c, habebit ipſa eandem formam atque undecima propoſitio $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione ſecundorum terminorum habebimus $c - b \propto - l$, hoc eſt, $c \propto b - l$. Deinde, comparando tertios terminos, habebimus $mm \propto dd + bc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, erit $dd \propto mm + bb - bl$. Tum, ex collatione quartorum terminorum, habebitur $n^3 \propto f^3 + ddb$, hoc eſt, ſubſtituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \propto n^3 - mmb - b^3 + bbl$. Vnde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & - mmx & + n^3 & \propto 0 \\ - l & - bb & + bbl & \\ & + bl & - mmb & \\ & & - b^3 & \end{array}$$

reliquis tribus inſervire.

Poſtremò, collatis ultimis terminis, habebimus $bf^3 \propto p^4$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & - mmx & + \frac{p^4}{b} & \propto 0 \\ - l & - bb & & \\ & + bl & & \end{array}$$

ad reliquas tres eſſe referendam.

12 Propoſitio.

Pro duodecima propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + ddx + f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 + cx^3 & + ddxx & + f^3x & - f^3b & \propto 0. \\ - b & - bc & - bdd & & \end{array}$$

Suppo-

Suppoſitis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, nec non bdd majore quàm f^3, habebit ipſa eandem formam atque duodecima propoſitio $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde conferendo ſecundos terminos habebimus $l \propto c - b$, hoc eſt, $c \propto l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \propto dd - bc$, hoc eſt, ſubſtituendo valorem c inventum, erit $dd \propto mm + bb + bl$. Tum comparando quartos terminos habebimus $f^3 - bdd \propto -n^3$, hoc eſt, ſubſtituto valore dd invento, erit $f^3 \propto bmm + bbl + b^3 - n^3$. Vnde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & + bxx & + bbx & + b^3 \propto 0 \\ & + l & + bl & + bbl \\ & & + mm & + bm^2 \\ & & & - n^3 \end{array}$$

tribus reliquis inſervire.

Denique, comparatis poſtremis terminis, habebimus $bf^3 \propto p^4$, ac per conſequens $f^3 \propto \frac{p^4}{b}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 & + bxx & + bbx & + \frac{p^4}{b} \propto 0 \\ & + l & + bl & \\ & & + mm & \end{array}$$

ad tres reliquas erit referenda.

13 *Propoſitio.*

Pro decima tertia propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + ddx + f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & + cx^3 & + ddxx & + f^3x & - f^3b \propto 0. \\ & - b & - bc & - bdd & \end{array}$$

Suppoſitis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, nec non f^3 majore quàm bdd, habebit ipſa eandem formam atque decima tertia propoſitio $x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, collatiſque ſecundis terminis, habebimus $l \propto c - b$, hoc eſt, $c \propto l + b$. Deinde, comparando tertios terminos, habebimus $mm \propto dd - bc$, hoc eſt, reſtituto valore c invento, erit $dd \propto mm - bb - bl$. Tum, comparatis quartis terminis, habebimus $n^3 \propto f^3 - bdd$, hoc eſt, ſubſtituto valore dd invento, erit $f^3 \propto n + b^3 + bbl - bmm$. Vnde conſtat, cognitâ

verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 + bxx & - bbx & + b^3 & \infty\, 0 \\ + l & - bl & + bbl & \\ & + m^2 & + n^3 & \\ & & - bm^2 & \end{array}$$

reliquis tribus inſervire.

Poſtremò, ex collatione ultimorum terminorum, habebimus $bf^3 \infty\, p^4$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & - bbx & + \frac{p^4}{b} & \infty\, 0 \\ + l & - bl & & \\ & + mm & & \end{array}$$

ad reliquas tres eſſe referendam.

14 *Propoſitio.*

Pro decima quarta propoſitione formemus ex duabus hiſce $x^3 + cxx + ddx + f^3 \infty\, 0$ & $x - b \infty\, 0$ hanc æquationem

$$\begin{array}{llllll} x^4 + cx^3 & + ddxx & + f^3x & - f^3b & \infty\, 0. \\ - b & - bc & - bdd & & \end{array}$$

Suppoſitis autem c majore quàm b, & bc majore quàm dd, nec non bdd majore quàm f^3, habebit ipſa eandem formam atque decima quarta propoſitio $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty\, 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $l \infty\, c - b$, hoc eſt, $c \infty\, l + b$. Deinde, comparatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \infty - mm$, hoc eſt, ſubſtituto valore c invento, erit $dd \infty\, bb + bl - mm$. Tum collatis quartis terminis habebitur $f^3 - bdd \infty - n^3$, hoc eſt, ſubſtituto valore dd invento, erit $f^3 \infty\, b^3 + bbl - bmm - n^3$. Vnde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 + bxx & + bbx & + b^3 & \infty\, 0 \\ + l & + bl & + bbl & \\ & - m^2 & - bm^2 & \\ & & - n^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inſervire.

Denique, ex comparatione poſtremorum terminorum, habebimus $p^4 \infty\, f^3 b$. unde ſequitur, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + \frac{p^4}{b} & \infty\, 0 \\ + l & + bl & & \\ & - m^2 & & \end{array}$$

ad tres reliquas eſſe referendam.

15 *Propoſitio.*

Pro decima quinta & ultima propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{l} x^4 + cx^3 - ddxx + f^3x - bf^3 \infty 0. \\ \quad\;\; - b \quad\; - bc \quad\; + bdd \end{array}$$

Suppoſitâ verò c majore quàm b, habebit ipſa eandem formam atque decima quinta propoſitio $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, conferendoque ſecundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc eſt, $c \infty l + b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc eſt, ſubſtituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm - bb - bl$. Tum collatis quartis terminis, habebitur $n^3 \infty f^3 + bdd$, hoc eſt, ſubſtituto valore dd invento, erit $f^3 \infty b^3 + bbl + n^3 - bmm$. Vnde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + b^3 & \infty 0 \\ \quad\;\; + l & + bl & + bbl & \\ & - mm & + n^3 & \\ & & - bm^2 & \end{array}$$

tribus reliquis inſervire.

Poſtremò, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty f^3 b$, ac per conſequens $f^3 \infty \frac{p^4}{b}$. unde ſequitur, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + \frac{p^4}{b} & \infty 0 \\ \quad\;\; + l & + bl & & \\ & - mm & & \end{array}$$

ad tres reliquas eſſe referendam.

OBSERVANDA

hîc in genere nonnulla.

1. Notandum, nos in omnibus præcedentibus adæquationibus ſupponere æquationes comparatas inter ſe habuiſſe æque multas radices, aut veras, aut falſas, aut imaginarias. Et ad dignoſcendas imaginarias à reliquis, inſerviet Tractatus Dioriſticus, quem ſubjungere animus eſt.

2. Quòd ſi diligenter perpendantur ea, quæ præcedunt, patebit,

49934

tebit, mutatis ſignis terminorum locorum parium,ut 2[di], 4[ti], &c. non mutatis ſignis reliquorum, (comprehendendo ſub terminorum numero etiam locos vacantes:) ſecundum terminum ſemper æquari ſummæ radicum æquationis, affectarum cum ſuis ſignis + & —; tertium verò, ſummæ productorum earundem radicum, cùm ſingulæ binæ in ſe invicem ducuntur: & quartum, ſummæ productorum multiplicationis, factæ ex ſingulis ternis, atque ſic deinceps.

Vnde ſequitur, deficiente ſecundo termino, ipſam falſam ſummamvè falſarum radicum æquari ipſi veræ vel verarum ſummæ; &, deficiente tertio termino, productum vel ſummam productorum ex binis, per ſignum + vel — deſignatorum, æquari ſummæ productorum vel ei,quod ex reliquis binis producitur ac cum contrario ſigno afficitur, & ſic de cæteris.

Primum Exemplum. Fiat ex multiplicatione $x - b \infty o$ per $x + c \infty o$ hæc æquatio $xx \begin{array}{l} -bx \\ +c \end{array} - bc \infty o$. Quare mutatis ſignis ſecundi termini ac retento ſigno tertii, habebimus $xx \begin{array}{l} +bx \\ -c \end{array} - bc \infty o$. Vnde apparet, $b - c$ eſſe ſummam radicis veræ $+b$ & falſæ $-c$; & $-bc$ eſſe productum ex multiplicatione falſæ $-c$ per veram $+b$.

Secundum Exemplum. Fiat deinde alia æquatio $xx \begin{array}{l} -bx \\ -c \end{array} + bc \infty o$, ex multiplicatione $x - b \infty o$ per $x - c \infty o$. Quare mutatis ſignis ſecundi termini,retento ſigno tertii,habebitur $xx \begin{array}{l} +bx \\ +c \end{array} + bc \infty o$. Vnde apparet, $+b + c$ eſſe ſummam duarum verarum radicum, & $+bc$ eſſe productum ex earum multiplicatione.

Tertium Exemplum. Fiat ex continua multiplicatione trium radicum $x - b \infty o$, $x - c \infty o$, & $x + f \infty o$ æquatio ſequens: $x^3 \begin{array}{l} -bxx \\ -c \\ +f \end{array} \begin{array}{l} +bcx \\ -bf \\ -cf \end{array} + bcf \infty o$. Quare mutatis ſignis terminorum loco pari poſitorum, relinquendo ſigna reliquorum, habebimus $x^3 \begin{array}{l} +bxx \\ +c \\ -f \end{array} \begin{array}{l} +bcx \\ -bf \\ -cf \end{array} - bcf \infty o$. Vnde apparet, ſecundum termi-

num

num $+b+c-f$ eſſe ſummam verarum radicum $+b$, $+c$, & falſæ $-f$; & tertium terminum $bc-bf-cf$ eſſe ſummam trium productorum $+bc$, $-bf$, & $-cf$, prout ſingulæ binæ radices in ſe invicem ducuntur; at quartum terminum $-bcf$ eſſe productum multiplicationis trium radicum $+b$, $+c$, & $-f$. Patet quoque, deficiente ſecundo termino, falſam f æquari ſummæ duarum verarum $+b$ & $+c$; &, deficiente tertio termino, producta multiplicationis $-bf$ & $-cf$, ſigno $-$ affecta, æquari producto $+bc$, ſigno $+$ affecto.

Quartum Exemplum. Formemus æquationem ex continua multiplicatione trium $x-b \infty 0$, $x-c \infty 0$, & $x-d \infty 0$, quæ ſit

$$\begin{array}{llll} x^3 & -bxx & +bcx & -bcd \infty 0. \\ & -c & +db & \\ & -d & +dc & \end{array}$$

Et mutatis ſignis locorum parium, retentis ſignis reliquorum, habebimus

$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & +dcx & +bcd. \\ & +c & +bd & \\ & +d & +bc & \end{array}$$

Vnde perſpicimus, ſecundum terminum $+b+c+d$ eſſe ſummam radicum $+b$, $+c$, & $+d$; & tertium terminum $+dc+db+bc$ eſſe ſummam productorum ex ſingulis binis radicibus in ſe invicem ductis; at quartum terminum $+bdc$ eſſe productum multiplicationis omnium trium radicum.

Quintum Exemplum. Fiat ex multiplicatione quatuor $x-b \infty 0$, $x-c \infty 0$, $x-d \infty 0$, & $x+f \infty 0$ ſequens æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -bx^3 & +bcxx & -bcdx & -bcdf \infty 0. \\ & -c & +bd & +bcf & \\ & -d & +cd & +bdf & \\ & +f & -bf & +cdf & \\ & & -cf & & \\ & & -df & & \end{array}$$

Vnde mutatis ſignis terminorum, locis paribus conſtitutorum, retentis ſignis reliquorum, habebimus

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +bx^3 & +bcxx & +bcdx & -bcdf \infty 0. \\ & +c & +bd & -bcf & \\ & +d & +cd & -bdf & \\ & -f & -bf & -cdf & \\ & & -cf & & \\ & & -df & & \end{array}$$

Atque apparet, $+b+c+d-f$ eſſe ſummam quatuor radicum æqua-

æquationis; & tertium terminum eſſe ſummam productorum ex ſingulis binis radicibus in ſe invicem ductis; at quartum terminum eſſe ſummam productorum ex ſingulis ternis radicibus; ac denique ultimum terminum eſſe productum earundem quatuor radicum $+b$, $+c$, $+d$, & $-f$, in ſe invicem ductarum. Patet quoque, deficiente ſecundo termino, falſam radicem $-f$ æquari ſummæ trium verarum $+b$, $+c$, & $+d$. Et, deficiente tertio termino, ſummam productorum ex binis, per — deſignatorum, æquari reliquæ ſummæ productorum ex binis, cum ſigno + affectorum. Non ſecus ſe res habet cum defecerit quartus.

Sextum & ultimum exemplum. Fingamus quoque ex multiplicatione continua quatuor radicum $x-b\infty 0$, $x-c\infty 0$, $x-d\infty 0$, & $x-f\infty 0$ hanc exurgere æquationem

$$\begin{array}{llllll} x^4 & -bx^3 & +bcxx & -bcdx & +bcdf\infty 0. \\ & -c & +bd & -bcf & \\ & -d & +cd & -bdf & \\ & -f & +bf & -cdf & \\ & & +cf & & \\ & & +df & & \end{array}$$

Et mutatis ſignis locorum imparium, retentis reliquis, habebimus

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +bx^3 & +bcxx & +bcdx & -bcdf. \\ & +c & +bd & +bcf & \\ & +d & +bf & +bdf & \\ & +f & +cd & +cdf & \\ & & +cf & & \\ & & +df & & \end{array}$$

Atque apparet, ſecundum terminum $+b+c+d+f$ eſſe ſummam quatuor radicum; tertium terminum $+bc+bd+cd+bf+cf+df$ eſſe ſummam productorum multiplicationis ex ſingulis binis; quartum $+bcd+bcf+bdf+cdf$ eſſe ſummam productorum multiplicationis ex ſingulis ternis; ac denique $+bcdf$ eſſe productum earundem quatuor radicum $+b$, $+c$, $+d$, & $+f$, in ſe invicem ductarum.

CAPVT XII.

Regula pro inveniendis reliquis Æquationis radicibus, unâ falſarum datâ.

Oportet mutare ſigna terminorum locorum parium æquationis propoſitæ, ita ut falſæ radices evadant veræ, & veræ falſæ. Transformatâ hoc pacto æquatione, ſuppoſitâque radice datâ pro vera, inveniatur æquatio, reliquis radicibus inveniendis inſerviens, ſicuti ſupra docuimus. Atque in æquatione ſic inventa mutentur ſigna terminorum locorum parium, habebimusque æquationem requiſito ſatisfacientem.

Exempli gratiâ. Esto æquationis $x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty 0$ una ex falſis radicibus data, quæ ſit b, atque mutatis ſignis terminorum locorum parium, habebimus $x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0$. Supponatur jam radix falſa b hujus æquationis eſſe vera, atque ut habeatur æquatio, reliquis duabus radicibus inſerviens, conſulatur Capitis V.. Prop[tio] 2[da]; & elicientur inde hæ duæ æquationes

$$xx \begin{array}{l}+l\\+b\end{array} x \begin{array}{l}+bb\\+bl\\-mm\end{array} \infty 0 \text{ \& } xx \begin{array}{l}+b\\+l\end{array} x + \frac{n^3}{b} \infty 0.$$

Quocirca mutatis utriuſque æquationis ſignis locorum parium, habebimus $xx \begin{array}{l}-l\\-b\end{array} x \begin{array}{l}+bb\\+bl\\-mm\end{array} \infty 0$ & $xx \begin{array}{l}-b\\-l\end{array} x + \frac{n^3}{b} \infty 0$, quarum quælibet quæſito ſatisfaciet.

CAPVT XIII.

Ad tollendum ſecundum terminum Æquationum QVADRATARVM.

$xx + lx - mm \infty 0$. Sit $z - \frac{1}{2}l \infty x$, & habebimus $zz * \begin{array}{l}-\frac{1}{4}ll\\-mm\end{array} \infty 0$.

$$xx - lx - mm \infty 0. \text{ Sit} \left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}l + z \infty x,\\ \frac{1}{2}l - y \infty x,\end{array}\right\} \text{eritque} \left\{\begin{array}{l}zz * \begin{array}{l}-\frac{1}{4}ll\\-mm\end{array} \infty 0\\ yy * \begin{array}{l}-\frac{1}{4}ll\\-mm\end{array} \infty 0.\end{array}\right.$$

$$xx - lx + mm \infty 0.\ \text{Sit} \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{2} l + z \infty x, \\ \tfrac{1}{2} l - y \infty x, \end{array}\right\} \text{eritque} \left\{\begin{array}{lll} zz * & - \tfrac{1}{4} ll & \infty 0. \\ & + mm & \\ yy * & - \tfrac{1}{4} ll & \infty 0. \\ & + mm & \end{array}\right.$$

CVBICARVM.

$$x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0.\ \text{Sit} \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{3} l + z \infty x, \\ \\ \tfrac{1}{3} l - y \infty x, \end{array}\right\} \text{eritque} \left\{\begin{array}{llll} z^3 * & - \tfrac{1}{3} llz & - \tfrac{2}{27} l^3 & \infty 0. \\ & + m^2 & - n^3 & \\ & & + \tfrac{1}{3} lm^2 & \\ y^3 * & - \tfrac{1}{3} lly & + \tfrac{2}{27} l^3 & \infty 0. \\ & + m^2 & - n^3 & \\ & & - \tfrac{1}{3} lm^2 & \end{array}\right.$$

$$x^3 - lxx - mmx - n^3 \infty 0.\ \text{Sit} \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{3} l + z \infty x, \\ \\ \tfrac{1}{3} l - y \infty x, \end{array}\right\} \text{eritque} \left\{\begin{array}{llll} z^3 * & - \tfrac{1}{3} llz & - \tfrac{2}{27} l^3 & \infty 0. \\ & - m^2 & - \tfrac{1}{3} lm^2 & \\ & & - n^3 & \\ y^3 * & - \tfrac{1}{3} lly & + \tfrac{2}{27} l^3 & \infty 0. \\ & - m^2 & + \tfrac{1}{3} lm^2 & \\ & & + n^3 & \end{array}\right.$$

$$x^3 - lxx + mmx + n^3 \infty 0.\ \text{Sit} \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{3} l + z \infty x, \\ \\ \tfrac{1}{3} l - y \infty x, \end{array}\right\} \text{eritque} \left\{\begin{array}{llll} z^3 * & - \tfrac{1}{3} llz & - \tfrac{2}{27} l^3 & \infty 0. \\ & + mm & + \tfrac{1}{3} lm^2 & \\ & & + n^3 & \\ y^3 * & - \tfrac{1}{3} lly & + \tfrac{2}{27} l^3 & \infty 0. \\ & + m^2 & - \tfrac{1}{3} lm^2 & \\ & & - n^3 & \end{array}\right.$$

$$x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0.\ \text{Sit} \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{3} l + z \infty x, \\ \\ \tfrac{1}{3} l - y \infty x, \end{array}\right\} \text{eritque} \left\{\begin{array}{llll} z^3 * & - \tfrac{1}{3} llz & - \tfrac{2}{27} l^3 & \infty 0. \\ & - m^2 & - \tfrac{1}{3} lm^2 & \\ & & + n^3 & \\ y^3 * & - \tfrac{1}{3} lly & + \tfrac{2}{27} l^3 & \infty 0. \\ & - m^2 & + \tfrac{1}{3} lm^2 & \\ & & - n^3 & \end{array}\right.$$

$$x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty 0.\ \text{Sit } z - \tfrac{1}{3} l \infty x,\ \text{eritque } \begin{array}{llll} z^3 * & - \tfrac{1}{3} llz & + \tfrac{2}{27} l^3 & \infty 0. \\ & - m^2 & + \tfrac{1}{3} lm^2 & \\ & & - n^3 & \end{array}$$

$$x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty 0.\ \text{Sit } z - \tfrac{1}{3} l \infty x,\ \text{eritque } \begin{array}{llll} z^3 * & - \tfrac{1}{3} llz & + \tfrac{2}{27} l^3 & \infty 0. \\ & + m^2 & - \tfrac{1}{3} lm^2 & \\ & & - n^3 & \end{array}$$

$x^3 +$

$$x^3 + lxx - mmx + n^3 \infty 0.\ \text{Sit}\ z - \tfrac{1}{3}l \infty x,\ \text{eritque}\ \begin{array}{llll} z^3 * & -\tfrac{1}{3}llz & +\tfrac{2}{27}l^3 & \infty 0. \\ & -m^2 & +\tfrac{1}{3}lm^2 & \\ & & +n^3 & \end{array}$$

QVADRATO-QVADRATARVM.

$$x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.\ \text{Esto} \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{4}l + z \infty x, \\ \\ \tfrac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{lllll} z^4 * & -\tfrac{3}{8}llzz & -\tfrac{1}{8}l^3 z & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & +\tfrac{1}{2}lm^2 & +\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & & -n^3 & -\tfrac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4 * & -\tfrac{3}{8}llyy & +\tfrac{1}{8}l^3 y & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & -\tfrac{1}{2}lm^2 & +\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & & +n^3 & -\tfrac{1}{4}ln & \\ & & & +p^4 & \end{array} \right.$$

$$x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.\ \text{Sit} \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{4}l + z \infty x, \\ \\ \tfrac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{lllll} z^4 * & -\tfrac{3}{8}llzz & -\tfrac{1}{8}l^3 z & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & -\tfrac{1}{2}lm^2 & -\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & & +n^3 & +\tfrac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4 * & -\tfrac{3}{8}llyy & +\tfrac{1}{8}l^3 y & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & +\tfrac{1}{2}lm^2 & -\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & & -n^3 & +\tfrac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array} \right.$$

$$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.\ \text{Sit} \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{4}l + z \infty x, \\ \\ \tfrac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{lllll} z^4 * & -\tfrac{3}{8}llzz & -\tfrac{1}{8}l^3 z & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & +\tfrac{1}{2}lm^2 & +\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & & +n^3 & +\tfrac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4 * & -\tfrac{3}{8}llyy & +\tfrac{1}{8}l^3 y & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & -\tfrac{1}{2}lm^2 & +\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & & -n^3 & +\tfrac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array} \right.$$

$$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.\ \text{Esto} \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{4}l + z \infty x, \\ \\ \tfrac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{lllll} z^4 * & -\tfrac{3}{8}llzz & -\tfrac{1}{8}l^3 z & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & -\tfrac{1}{2}lm^2 & -\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & & -n^3 & -\tfrac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4 * & -\tfrac{3}{8}llyy & +\tfrac{1}{8}l^3 y & -\tfrac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & +\tfrac{1}{2}lm^2 & -\tfrac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & & +n^3 & -\tfrac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array} \right.$$

$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$. Eſto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * - \frac{3}{8}llzz & + \frac{1}{8}l^3 z & - \frac{3}{256}l^4 & \infty 0. \\ \quad + m^2 & - \frac{1}{2}lm^2 & + \frac{1}{16}llm^2 & \\ & - n^3 & + \frac{1}{4}ln^3 & \\ & & + p^4 & \end{array}$$

$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$. Eſto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * - \frac{3}{8}llzz & + \frac{1}{8}l^3 z & - \frac{3}{256}l^4 & \\ \quad - mm & + \frac{1}{2}lm^2 & - \frac{1}{16}llmm & \infty 0. \\ & + n^3 & - \frac{1}{4}ln^3 & \\ & & + p^4 & \end{array}$$

$x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$. Eſto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * - \frac{3}{8}llzz & + \frac{1}{8}l^3 z & - \frac{3}{256}l^4 & \\ \quad - mm & + \frac{1}{2}lm^2 & - \frac{1}{16}llmm & \infty 0. \\ & - n^3 & + \frac{1}{4}ln^3 & \\ & & + p^4 & \end{array}$$

$x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$. Eſto $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \infty x, \\ \frac{1}{4}l - y \infty x, \end{array}\right\}$ eritque

$$\left\{\begin{array}{llll} z^4 * - \frac{3}{8}llzz & - \frac{1}{8}l^3 z & - \frac{3}{256}l^4 & \\ \quad + m^2 & + \frac{1}{2}lm^2 & + \frac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & - n^3 & - \frac{1}{4}ln^3 & \\ & & - p^4 & \\ y^4 * - \frac{3}{8}llyy & + \frac{1}{8}l^3 y & - \frac{3}{256}l^4 & \\ \quad + m^2 & - \frac{1}{2}lm^2 & + \frac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & + n^3 & - \frac{1}{4}ln^3 & \\ & & - p^4 & \end{array}\right.$$

$x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$. Eſto $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \infty x, \\ \frac{1}{4}l - y \infty x, \end{array}\right\}$ eritque

$$\left\{\begin{array}{llll} z^4 * - \frac{3}{8}llzz & - \frac{1}{8}l^3 z & - \frac{3}{256}l^4 & \\ \quad - m^2 & - \frac{1}{2}lm^2 & - \frac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & + n^3 & + \frac{1}{4}ln^3 & \\ & & - p^4 & \\ y^4 * - \frac{3}{8}llyy & + \frac{1}{8}l^3 y & - \frac{3}{256}l^4 & \\ \quad - m^2 & + \frac{1}{2}lm^2 & - \frac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & - n^3 & + \frac{1}{4}ln^3 & \\ & & - p^4 & \end{array}\right.$$

$$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.\ \text{Eſto}\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{4}l + z \infty x,\\ \\ \tfrac{1}{4}l - y \infty x,\end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{llll} z^4 * & -\tfrac{3}{8}llzz & -\tfrac{1}{8}l^3\,z & -\tfrac{3}{256}l^4 \\ & +m^2 & +\tfrac{1}{2}lm^2 & +\tfrac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ & & +n^3 & +\tfrac{1}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \\ y^4 * & -\tfrac{3}{8}llyy & +\tfrac{1}{8}l^3\,y & -\tfrac{3}{256}l^4 \\ & +m^2 & -\tfrac{1}{2}lm^2 & +\tfrac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ & & -n^3 & +\tfrac{1}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \end{array}\right.$$

$$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.\ \text{Eſto}\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{4}l + z \infty x,\\ \\ \tfrac{1}{4}l - y \infty x,\end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{llll} z^4 * & -\tfrac{3}{8}llzz & -\tfrac{1}{8}l^3\,z & -\tfrac{3}{256}l^4 \\ & -m^2 & -\tfrac{1}{2}lm^2 & -\tfrac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ & & -n^3 & -\tfrac{1}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \\ y^4 * & -\tfrac{3}{8}llyy & +\tfrac{1}{8}l^3\,y & -\tfrac{3}{256}l^4 \\ & -m^2 & +\tfrac{1}{2}lm^2 & -\tfrac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ & & +n^3 & -\tfrac{1}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \end{array}\right.$$

$x^4 + lx^3 + mm\,xx - n^3x - p^4 \infty 0.$ Eſto $z - \tfrac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * & -\tfrac{3}{8}ll\,zz & +\tfrac{1}{8}l^3\,z & -\tfrac{3}{256}l^4 \\ & +m^2 & -\tfrac{1}{2}lm^2 & +\tfrac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ & & -n^3 & +\tfrac{1}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \end{array}$$

$x^4 + lx^3 - mm\,xx + n^3x - p^4 \infty 0.$ Eſto $z - \tfrac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * & -\tfrac{3}{8}ll\,zz & +\tfrac{1}{8}l^3\,z & -\tfrac{3}{256}l^4 \\ & -m^2 & +\tfrac{1}{2}lm^2 & -\tfrac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ & & +n^3 & -\tfrac{1}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \end{array}$$

$x^4 + lx^3 - mm\,xx - n^3x - p^4 \infty 0.$ Eſto $z - \tfrac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * & -\tfrac{3}{8}ll\,zz & +\tfrac{1}{8}l^3\,z & -\tfrac{3}{256}l^4 \\ & -m^2 & +\tfrac{1}{2}lm^2 & -\tfrac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ & & -n^3 & +\tfrac{1}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \end{array}$$

$x^4 + lx^3 + mm\,xx + n^3x - p^4 \infty 0.$ Eſto $z - \tfrac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * & -\tfrac{3}{8}ll\,zz & +\tfrac{1}{8}l^3\,z & -\tfrac{3}{256}l^4 \\ & +m^2 & -\tfrac{1}{2}lm^2 & -\tfrac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ & & +n^3 & -\tfrac{1}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \end{array}$$

Vnde colligere licet, omnes ſuppoſitiones, quæ ad tollendum ſecundum terminum adhibentur, neceſſariò exhibere æquationem realem, modò reales radices adfuerint in æquatione propoſita; & ſi nullæ in his fuerint, id indicio eſſe, nullas quoque eſſe imaginarias in æquatione propoſita. Nam, exempli gratiâ, ſi ſit æquatio $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \propto 0$: patet, ſi radix eſt realis, x neceſſariò debere æqualis eſſe $\frac{1}{4}l$, vel major, vel minor. Si æqualis fuerit $\frac{1}{4}l$, ultimus terminus æquationis transformatæ deficere debet; ſi major fuerit quàm $\frac{1}{4}l$, æquatio transformata denominata à radice z erit realis; ſi denique minor fuerit; transformata æquatio à radice y denominata itidem realis erit.

Quòd ſi ſecundus terminus æquationis propoſitæ afficitur ſigno +, ut, exempli gratiâ, ſi ſit $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$: patet, ſi adfuerit radix aliqua realis, ſuppoſitionem hanc $z - \frac{1}{4}l \propto x$ ſemper eſſe neceſſariò realem ac denotare aliquam quantitatem; adeoque transformatam æquationem admittere quoque aliquam radicem.

Deinde conſtat, radices veras æquationum à radice y denominatarum eſſe falſas æquationum à radice z denominatarum; & contra, radices veras æquationum à radice z denominatarum eſſe falſas æquationum à radice y denominatarum.

CAPVT XIV.

Continens modum tollendi penultimum terminum Æquationum, ſecundo termino carentium.

PRo Cubicis. Supponatur ultimus terminus diviſus per incognitam quantitatem R^2 eſſe æqualis radici æquationis propoſitæ, & ſic æquatio transformetur, in qua demum penultimus deficiet terminus.

Pro Quadrato-quadratis. Supponatur ultimus terminus diviſus per incognitam quantitatem R^3 eſſe æqualis radici æquationis propoſitæ, & tum rurſus transformatâ æquatione penultimus terminus deficiet.

Pro æquationibus quinque dimenſionum ſupponatur ultimus terminus diviſus per incognitam quantitatem R^4 eſſe æqualis radici æquationis propoſitæ, & ſic in infinitum, transmutatis deinde æquationibus, uti dictum eſt.

Sed pro æquationibus quatuor dimenſionum commodius eſt, ſupponere quadratum ultimi termini diviſum per incognitam quantitatem R eſſe æquale radici incognitæ, atque ita transformare æquationem.

Exemplum Cubicarum. Proponatur $x^3 * + mmx - n^3 \infty 0$. Eſto $\frac{n^3}{R^2} \infty x$, &, transformatâ æquatione, habebitur $\frac{n^9}{R^6} + \frac{mmn^3}{R^2} - n^3 \infty 0$. Hinc multiplicatis omnibus per R^6, fiet $n^9 + mmn^3 R^4 - n^3 R^6 \infty 0$, adeoque diviſis per n^3, fiet $n^6 + mmR^4 - R^6 \infty 0$, hoc eſt, per tranſpoſitionem, habebitur $R^6 - mmR^4 * - n^6 \infty 0$. æquatio cubica, carens penultimo termino, & in qua cùm datur R^2 ex ſuppoſitione habetur $x \infty \frac{n^3}{R^2}$.

Aliud Exemplum. Proponatur $x^3 * - mmx - n^3 \infty 0$. Eſto $\frac{n^3}{R^2} \infty x$, fietque $\frac{n^9}{R^6} - \frac{mmn^3}{R^2} - n^3 \infty 0$, hoc eſt, $R^6 + mmR^4 * - n^6 \infty 0$. æquatio cubica, in qua penultimus terminus deficit, & in qua cùm datur R^2, ex ſupra poſita ſuppoſitione habetur x.

Tertium Exemplum. Proponatur $x^3 * - mmx + n^3 \infty 0$. Eſto $\frac{n^3}{R^2} \infty x$, eritque, transformatâ æquatione, $\frac{n^9}{R^6} - \frac{mmn^3}{R^2} + n^3 \infty 0$, hoc eſt, $R^6 - mmR^4 * + n^6 \infty 0$. æquatio cubica, carens penultimo termino, & in qua cùm datur R^2 ex ſuppoſitione id habetur quod requiritur.

Exemplum Quadrato-quadratarum. Proponatur $x^4 * - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$. Eſto $\frac{p^2}{R} \infty x$, &, transformatâ æquatione fiet, $\frac{p^8}{R^4} - \frac{mmp^4}{R^2} + \frac{n^3pp}{R} - p^4 \infty 0$. Hoc eſt, multiplicatis omnibus per R^4, habebimus $p^8 - mmp^4R^2 + n^3ppR^3 - p^4R^4 \infty 0$, ac proinde diviſis per p^4, habebitur $R^4 - \frac{n^3}{pp}R^3 + mmR^2 * - p^4 \infty 0$. æquatio quatuor dimenſionum, carens penultimo termino.

Exemplum ſecundum. Proponatur $x^4 * + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$. Supponendo $\frac{pp}{R} \infty x$, transformetur æquatio, fietque $R^4 - \frac{n^3}{pp}R^3 + mmR^2 * + p^4 \infty 0$. æquatio in qua penultimus terminus deficit.

Exemplum tertium. Proponatur $x^4 * - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$. Suppoſitâ $x \infty \frac{pp}{R}$, æquatio transformata erit $R^4 - \frac{n^3}{pp}R^3 - mmR^2 * + p^4 \infty 0$, carens penultimo termino.

Exemplum quartum. Proponatur $x^4 * - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$. Suppoſito $\frac{pp}{R} \infty x$, erit transformata æquatio $R^4 + \frac{n^3}{pp}R^3 - mmR^2 * + p^4 \infty 0$, penultimo termino deſtituta.

Exemplum quintum. Proponatur $x^4 * + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$. Et ſuppoſito $\frac{pp}{R} \infty x$, æquatio transformata erit $R^4 + \frac{n^3}{pp}R^3 - mmR^2 * - p^4 \infty 0$, carens penultimo termino.

Exemplum ſextum. Proponatur $x^4 * - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$. Et ſuppoſito $\frac{pp}{R} \infty x$, erit æquatio transformata $R^4 + \frac{n^3}{pp}R^3 + mmR^2 * - p^4 \infty 0$, quæ deſtituitur penultimo termino.

Exemplum ſeptimum. Proponatur $x^4 * + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$. Suppoſito $\frac{pp}{R} \infty x$, transformata æquatio erit $R^4 - \frac{n^3}{pp}R^3 - mmR^2 * - p^4 \infty 0$, carens penultimo termino.

Ex quibus manifeſtum eſt, ex omnibus æquationibus auferri poſſe penultimum terminum, quandoquidem ſuperiùs oſtenſum eſt, ex omni æquatione tolli poſſe ſecundum, ac modò jam eſt demonſtratum, quo pacto ex æquationibus, ſecundo termino carentibus, penultimus terminus auferatur. Id quod annotaſſe operæ pretium duximus, cum Vieta, poſtquam Capite 1mo de *Æquationum Emendatione* ſecundum terminum cujuſque æquationis tollere docuit, versùs finem ejuſdem Capitis affirmet, poſſe etiam aliquando alios auferri æquationis terminos, atque ex hac noſtra quidem methodo conſtet, quomodo ſemper penultimus tolli queat.

CAPVT XV.

Methodus tranſmutandi Æquationes Cubicas compoſitas, in quibus ſecundus terminus deeſt, in Æquationes Cubicas ſimplices, quando id fieri poteſt.

PRoponatur hæc æquatio $x^3 * + 3mmx - n^3 \infty 0$. Supponamus $zz - zx - mm \infty 0$, hoc eſt, $x \infty \frac{zz - mm}{z}$. Vnde, transformatâ æquatione, habebitur

$$\frac{z^6 - 3mmz^4 + 3m^4zz - m^6}{z^3} + \frac{3mmzz - 3m^4}{z} - n^3 \infty 0,$$

hoc eſt, multiplicatis omnibus per z^3, invenietur hæc æquatio $z^6 - n^3z^3 - m^6 \infty 0$, vel $z^6 \infty n^3z^3 + m^6$, cujus radix eſt $z^3 \infty \frac{1}{2}n^3 + \sqrt{\frac{1}{4}n^6 + m^6}$. Quæ eſt æquatio cubica ſimplex.

Cognita autem ejus radice z, erit ex ſupra poſitis radix altera $x \infty \frac{zz - mm}{z}$. Quæ ſemper eſt poſſibilis, cum z major ſit quàm m.

Aliter. Supponatur $zz + zx - mm \infty 0$, eritque $x \infty \frac{mm - zz}{z}$. Vnde transformatâ æquatione habebimus $z^6 + n^3z^3 - m^6 \infty 0$, hoc eſt, $z^6 \infty - n^3z^3 + m^6$, cujus radix eſt $z^3 \infty - \frac{1}{2}n^3 + \sqrt{\frac{1}{4}n^6 + m^6}$. Quæ rurſus æquatio eſt cubica ſimplex. Cujus ope, cùm cognoſcitur z, habebitur $x \infty \frac{mm - zz}{z}$, quæ ſemper erit poſſibilis.

Proponatur item hæc æquatio $x^3 * - mmx - n^3 \infty 0$, ſupponaturque $zz - zx + mm \infty 0$, hoc eſt, $x \infty \frac{zz + mm}{z}$. Vnde transformatâ æquatione habebimus $\frac{z^6 + 3mmz^4 + 3m^4zz + m^6}{z^3} - \frac{3mmzz - 3m^4}{z} - n^3 \infty 0$, hoc eſt, $z^6 - n^3z^3 + m^6 \infty 0$. ſeu $z^6 \infty n^3z^3 - m^6$, cujus radix eſt $z^3 \infty \frac{1}{2}n^3$ 8 $\sqrt{\frac{1}{4}n^6 - m^6}$

Vnde patet, oportere m^6 non majus eſſe quàm $\frac{1}{4}n^6$, ut æquatio hæc $z^6 \infty n^3 z^3 - m^6$ locum obtineat. Nam ſi majus ſit, non poſſet propoſita æquatio $x^3 * - mmx - n^3 \infty 0$ ſic in ſimplicem cubicam tranſmutari.

Capvt XVI.

Methodus generalis, concernens uſum ſecundarum radicum, ad tollenda ſigna radicalia ex Æquatione propoſita.

Si fuerint duæ æquationes, in quibus eadem litera reperitur, licet ipſas reducere comparando cum duabus aliis, in quibus hæc litera pauciores habet dimenſiones.

Exempli gratiâ, habeamus haſce duas æquationes $x^3 + bxx - ccx - d^3 \infty 0$ & $x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0$. Quibus tranſpoſitis, habebimus $x^3 \infty - bxx + ccx + d^3$ & $x^3 \infty + lxx - mmx + n^3$, ac per conſequens $\begin{array}{l} lxx \\ b \end{array} \begin{array}{l} -mmx \\ -cc \end{array} \begin{array}{l} +n^3 \\ -d^3 \end{array} \infty 0$, hoc eſt, $xx \infty \frac{mmx + ccx + d^3 - n^3}{l+b}$. in quâ litera x pauciorum eſt dimenſionum. Atque ut habeatur adhuc alia, multiplicetur tantùm æquatio inventa per x, & invenietur $x^3 \infty \frac{\begin{array}{l} mmxx \\ cc \end{array} \begin{array}{l} +d^3x \\ -n^3 \end{array}}{l+b}$.
Quæ comparata cum aliqua ex præcedentibus, verbi gratiâ, cum ſecunda, exhibet ſequentem æquationem $\begin{array}{l} +m^2xx \\ +cc \\ -ll \\ -lb \end{array} \begin{array}{l} -n^3x \\ +lm^2 \\ +bm^2 \\ +d^3 \end{array} \begin{array}{l} -ln^3 \\ -bn^3 \\ \\ \\ \end{array} \infty 0.$
in quâ litera x ſimiliter duarum tantùm eſt dimenſionum. Sed ſi collata fuiſſet cum prima æquatione, inventa fuiſſet alia, ubi x adhuc pauciores habuiſſet dimenſiones, ita ut eligenda ſit ad comparationem facillima. Atque ſic continuando inveniri hîc poſſunt duæ aliæ, ubi x eſt unius dimenſionis, & tandem alia ubi prorſus deeſt. Quod ipſum docet, dari tales æquationes, in quibus litera, quæ in utraque inveniri debet, mutuâ illâ comparatione planè aufertur. Vnde apparet, poſſe quidem aliquando auferri hanc literam, quamvis non diminuatur numerus dimenſionum.

Exem-

Exempli gratiâ, ſi dentur hæ æquationes $xx - bx - cc \infty 0$ & $xx - bx + dd - bb \infty 0$, habebimus $xx - bx \infty cc$, & $xx - bx \infty + bb - dd$, ergo $cc \infty bb - dd$.

Venio jam ad aſymmetrias ſeu irrationales quantitates, pro quibus tollendis, oportet tantùm ſupponere literas æquales ſingulis terminis aſymmetris æquationis propoſitæ. Quâ quidem ratione non tantùm obtinebimus æquationem propoſitam, in qua omnes hæ literæ ſunt ſubſtitutæ; ſed etiam tot alias, quot literæ fuerunt ſuppoſitæ. Vnde collatis ordine omnibus hiſce æquationibus, devenietur ad æquationem, ubi nulla literarum invenitur ac per conſequens nullum ſignum radicale.

Exempli gratiâ, proponatur æquatio $c + \sqrt{C.\,bbx} - \sqrt{dx} \infty 0$. Ad tollendas igitur ejus aſymmetrias, ponamus $R \infty \sqrt{C.\,bbx}$, & $z \infty \sqrt{dx}$. Quibus in æquatione propoſita ſubſtitutis, habebimus $c + R - z \infty 0$; atque ex reliquis ſuppoſitionibus erit $R^3 \infty bbx$, & $zz \infty dx$. Primò, ad tollendum R, habebimus $R \infty z - c$, ideoque $R^3 \infty z^3 - 3czz + 3ccz - c^3$. Atqui eſt quoque $R^3 \infty bbx$. Quare erit $z^3 - 3czz + 3ccz - c^3 - bbx \infty 0$, & per conſequens $z^3 \infty + 3czz - 3ccz + c^3 + bbx$. Sed ſi multiplicetur ſuperiùs propoſita æquatio $zz \infty dx$ per z, habebitur etiam $z^3 \infty dxz$. Ergo erit

$$\begin{array}{l} 3czz - 3ccz + c^3 \infty 0 \\ \;\;\; - dx \;\;\;\;\;\;\;\;\;\; + bbx \end{array}$$

& ſubſtituto dx loco zz, habebimus

$$\begin{array}{l} 3cdx - 3ccz + c^3 \infty 0 \\ - dx \;\;\;\;\;\;\;\;\;\; + bbx \end{array}$$

hoc eſt,

$$\begin{array}{l} 3ccz \infty 3cdx + bbx, \\ \;\;\; dx \;\;\;\;\;\;\;\;\;\; c^3 \end{array}$$

ſeu $z \infty \dfrac{3cdx + bbx + c^3}{3cc + dx}$. Quæ ſi multiplicetur per z, fiet $zz \infty \dfrac{3cdxz + bbxz + c^3z}{3cc + dx}$. Sed eſt quoque $zz \infty dx$. Igitur habebimus $3cdxz + bbxz + c^3z \infty 3ccdx + ddxx$, hoc eſt, $\dfrac{3ccdx + ddxx}{3cdx + bbx + c^3} \infty z$. Inventa autem eſt $z \infty \dfrac{3cdx + bbx + c^3}{3cc + dx}$. Quare habebimus tandem

$$\begin{array}{llll} d^3x^3 & -3ccddxx & +3c^4dx & -c^6 \infty 0. \\ & -6bbcd & -2c^3bb & \\ & -b^4 & & \end{array}$$

In qua æquatione nullus terminus irrationalis reperitur. Quòd ſi autem alii adhuc reperirentur, oporteret tantùm operando ut ſupra auferre cæteras literas, cæteris terminis irrationalibus æquales ſuppoſitas. Quâ quidem ratione omnes omnino termini irrationales tollentur, calculus verò prolixior evadet.

Neceſſitas hujus methodi vel hinc patet, quòd, ſi fuerint plures quatuor terminis irrationalibus, ſigna radicalia, per methodum à Vieta traditam, Capite quinto de Emendatione Æquationum, tolli non poſſint.

FINIS.

Ad Tractatum de Limitibus Æquationum

EPISTOLA PRÆLIMINARIS.

Clariſſimo Viro

FRANCISCO à SCHOOTEN,

Mathematum in Illuſtri Leidenſi Academia Profeſſori,

ERASMIVS BARTHOLINVS

S. P.

N*Iſi meminiſſem, quanto majore animo honeſtatis fructus in conſcientia, quàm in fama reponatur; nequaquam opportunum fuiſſet, in edendis hiſce opuſculis Analyticis conſilium. Verùm quia communibus magis commodis quàm privatæ jactantiæ ſtudui, eò animus auſus eſt, deliberato conſilio obſequi. Cujus meæ conſcientiæ interpretem, non alium magis deſidero, quàm te, Vir Clariſſime, quem utilitatibus aliorum, plus quàm propriæ laudi, indies deſervire, compertum habeo. Venit in mentem ſtudioſum illud otium, quod Leidæ mihi ſemper emolumento, utriſque deinde ſolatio erat, cujusque varietates ſi oratione repetere vellem, prout animo pleræque obverſantur, non dubito quin exiſtimationi hominum diligentia & fides noſtra, & in pleriſque etiam pietas ſubjiceretur. Et licèt neſciam, an ullum*

tempus jucundiùs exegerim; tamen eâ de causâ magnifacio, quòd amicitiæ tuæ, uſque ad intimam familiaritatem, capacem me redderet. Neque aliam interpretationem habuit, quòd Leidâ diſceſſurus, Iſagogen Carteſianam typis excudendam concinnaveram, ut meam famam cum tua extenderem. Quâ de causâ, cum non modò offenſas, verùm etiam ſimultates varias ſubierim; non ignoro, quæ futura ſit de hiſce jam edendis ſententia. Ne dubites tamen quin omnia æquo animo toleraverim, præſertim quia pietas & obſequium cauſam junxêre. Quem enim præterit, fatum literatorum? Mihi certè non improviſa eſt calumniandi vanitas. Eſt ita naturâ comprobatum, ut benefactis major ex conſcientiâ merces, quàm in ore hominum reponatur: nam plerique, tantum ſuæ detractum iri gloriæ exiſtimant, quantum ceſſerit alienæ: poſtremò, ignaviſſimus quiſque aliorum ſcripta carpere non veretur. Sic contendere pro moribus temporum eruditio eſt. Quod recordantem, poſteritatis magna miſeratio ſubit. Quot enim præclara inventa putas obſcurari, propter ſcelus hoc obtrectandi? Plerique ſe intra perpetuum ſilentium tenere amant, potiùs quàm malignitati interpretantium exponi. Ita communem hunc errorem, bonum publicum magnis detrimentis expiabit. Ego aliorum exemplo quidem didici,

nul-

nullam ex meis laboribus ſperare laudem; tanta tamen mihi ſemper fuit reverentia poſterûm, ut cenſuram erroris non tam reformidem quàm inhumanitatis. Sed, ut de pictore niſi Artifex judicare, ita niſi Mathematicus non ſatis poteſt perſpicere Mathematica; tuæ potiſſimùm ſententiæ hæc exponuntur. Eximium habent uſum ea quæ ſequenti tractatu exponentur, ad numeroſam Æquationum reſolutionem, ut reliquas utilitates pertranſeam, quia Tu eas ignorare non potes. Quare Lectores rogo, ut judiciis parcant, donec penitus omnia inſpexerint. Et ſi qui fuerint qui hæc recuſaverint, ſciant ſe nec inventis gratiam adimere, nec mihi laudis conſcientiam. Te verò, Vir Clariſſime, ſi offenderint, omnibus commendationibus deſtituta reputabo. Vale.

POSTERIOR TRACTATVS
DE
LIMITIBVS
ÆQVATIONVM,

Seu

Quo pacto ex forma Æquationum affectarum definiri poſſint limites, intra quos radices veræ debent offendi.

DE

DE LIMITIBVS ÆQVATIONVM.

CAPVT I.

De Æquationum Quadratarum ſeu duarum dimenſionum limitibus.

Prop. 1. $xx - lx + mm \infty 0$.

PEr tranſpoſitionem erit $mm \infty lx - xx$, & ſi prima pars fuerit realis, erit etiam altera pars realis, ideoque lx majus quàm xx; & diviſo utroque termino per x, erit l major quàm x. Quin & per tranſpoſitionem propoſitæ æquationis habebitur $xx \infty lx - mm$: ideoque altera pars eſt realis, & lx majus quàm mm. Vnde diviſo utroque termino per l, erit x major quàm $\frac{mm}{l}$. Quare æquationis propoſitæ utraque radix x major erit quàm $\frac{mm}{l}$, ſed minor quàm l.

Prop. 2. $xx - lx - mm \infty 0$.

Per tranſpoſitionem habebimus $xx \infty lx + mm$, ideoque xx majus erit quàm mm, & x major quàm m, ac proinde mx majus quàm mm. Vnde xx minus erit quàm $lx + mx$, adeoque ſi utraque pars dividatur per x, erit x minor quàm $l + m$. Rurſus, quoniam xx æquatur $lx + mm$, erit xx majus quàm lx; ac proinde ſi uterque terminus dividatur per x, erit x major quàm l, & lx majus quàm ll. Hinc cum xx æquetur $lx + mm$, erit xx majus quàm $ll + mm$, hoc eſt, x major quàm $\sqrt{ll + mm}$. Poſtremò, quandoquidem x major eſt quàm m, erit lx majus quàm lm, & xx majus quàm $lm + mm$, hoc eſt, x major quàm $\sqrt{lm + mm}$. Vnde radix æquationis propoſitæ erit major quàm maxima harum duarum $\sqrt{ll + mm}$ & $\sqrt{lm + mm}$, ſed minor quàm $l + m$.

Prop. 3. $xx + lx - mm \propto 0$.

Per tranſpoſitionem habebimus $xx + lx \propto mm$, & per conſequens $\frac{mm}{l}$ majus erit quàm x. Rurſus exiſtente $xx + lx \propto mm$, erit mm majus quàm xx, & m major quàm x, ac proinde mx majus quàm xx. Atqui habemus $xx + lx \propto mm$. Ergo $mx + lx$ majus erit quàm mm. Hinc diviſâ utrâque parte per $m + l$, fiet x major quàm $\frac{mm}{l+m}$. Quare inventa eſt x radix æquationis propoſitæ major quàm $\frac{mm}{l+m}$, at minor quàm $\frac{mm}{l}$ & m.

CAPUT II.

De limitibus Æquationum Cubicarum ſeu trium dimenſionum, ſecundo termino carentium.

Prop. 1. $x^3 * - mmx + n^3 \propto 0$.

Per tranſpoſitionem habebimus $x^3 \propto + mmx - n^3$, eritque mmx majus quàm n^3. Unde diviſo utroque termino per mm, erit x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Deinde per tranſpoſitionem erit $mmx - x^3 \propto n^3$, ac per conſequens mm majus quàm xx, & m major quàm x. Quare inventa eſt utraque radix x æquationis propoſitæ major quàm $\frac{n^3}{mm}$, & minor quàm m.

Prop. 2. $x^3 * - mmx - n^3 \propto 0$.

Per tranſpoſitionem habebimus $x^3 - mmx \propto n^3$, eritque xx majus quàm mm, & x major quàm m. Erit quoque $x^3 - n^3 \propto mmx$, ideoque x^3 major quàm n^3, & x major quàm n, ac proinde nnx majus quàm n^3. Atqui per tranſpoſitionem propoſitionis habemus $mmx + n^3 \propto x^3$. Quare $mmx + nnx$ majus erit quàm x^3; & diviſâ utrâque parte per x, erit $mm + nn$ majus quàm xx; ideoque x minor quàm $\sqrt{mm + nn}$. Inventa ergo eſt x radix æquationis propoſitæ major quàm m & n, at minor quàm $\sqrt{mm + nn}$. Atque liquet, ad evitandam extractionem radicis cubicæ ipſius n^3, quòd loco nn in vinculo aſſumi poſſit quantitas aliqua, quæ non ſit

ſit minor. Id quod non erit difficile, cognitis nempe tribus dimenſionibus ipſius n^3, ſumendoque loco nn rectangulum ſub duabus quantitatibus; quarum alterutra non ſit ipsâ n minor. Eritque hoc ad ſequentia notatu dignum.

Prop. 3. $x^3 * + mmx - n^3 \infty 0.$

Per tranſpoſitionem habebimus $x^3 \infty n^3 - mmx$, eritque $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x. Rurſus erit $mmx \infty n^3 - x^3$, & conſequenter n^3 major quàm x^3, & n major quàm x, ac proinde nnx majus quàm x^3. Sed per tranſpoſitionem æquationis propoſitæ eſt quoque $x^3 + mmx \infty n^3$. Ergo $mmx + nnx$ majus erit quàm n^3, & diviſâ utrâque parte per $nn + mm$, erit x major quàm $\frac{n^3}{nn+mm}$. Inventa itaque eſt radix x æquationis propoſitæ eſſe major quam $\frac{n^3}{mm+nn}$, ſed minor quàm $\frac{n^3}{mm}$ & n. Poſſumus etiam loco nn accipere rectangulum duarum maximarum dimenſionum ipſius n^3, ut radicis cubicæ extractio evitetur.

CAPVT III.

De limitibus Æquationum Cubicarum, penultimo termino carentium.

Prop. 1. $x^3 - lxx * + n^3 \infty 0.$

Per tranſpoſitionem erit $x^3 + n^3 \infty lxx$, ideoque xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Rurſus erit $n^3 \infty lxx - x^3$, & conſequenter l major quàm x. Quælibet igitur radicum x æquationis propoſitæ major erit quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, & minor quàm l.

Prop. 2. $x^3 - lxx * - n^3 \infty 0.$

Per tranſpoſitionem erit $x^3 - lxx \infty n^3$, ideoque x major quàm l. Rurſus erit $x^3 - n^3 \infty lxx$, & conſequenter x major quàm n, & xx majus quàm nn, & nxx majus quàm n^3. Atqui habemus quoque per tranſpoſitionem $lxx + n^3 \infty x^3$. Quare erit $lxx + nxx$ majus quàm x^3. Dividatur utraque pars per xx, eritque $l + n$

major quàm x. Inventa itaque eſt radix x æquationis propoſitæ major quàm l & n, ſed minor quàm $l+n$. Manifeſtum eſt quoque ad evitandam extractionem radicis cubicæ ex n^3, quòd loco n ſumi poſſit minor trium dimenſionum ipſius n^3, quando x major eſt; & quando minor perhibetur quàm $l+n$, quòd tunc loco n maxima trium dimenſionum ipſius n^3 accipi queat, & ſic de reliquis, quibus ob nimiam facilitatem non immoramur.

Prop. 3. $x^3 + lxx * - n^3 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem erit $x^3 \infty n^3 - lxx$, ac per conſequens $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx. Eſt etiam $lxx \infty n^3 - x^3$, & conſequenter n major quàm x, & nxx majus quàm x^3. Sed habetur $x^3 + lxx \infty n^3$. Ergo $nxx + lxx$ majus erit quàm n^3, hoc eſt, diviſâ utrâque parte per $n+l$, erit xx majus quàm $\frac{n^3}{n+l}$. Inventa eſt itaque radix x æquationis propoſitæ major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l+n}}$, ſed minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & n. Demonſtratur præterea $nnx + lnx$ majus eſſe quàm n^3, & $nx + lx$ majus quàm nn, & conſequenter x major quàm $\frac{nn}{l+n}$, quandoquidem n major eſt quàm x.

CAPVT IV.

De Æquationibus Cubicis, in quibus omnes termini extant.

Prop. 1. $x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0$.

PEr tranſpoſitionem habebimus $x^3 - lxx \infty n^3 - mmx$. Hinc ſi x æquetur ipſi l, erit etiam x ipſi $\frac{n^3}{mm}$ æqualis. Ideoque, ſi viciſſim l æquetur ipſi $\frac{n^3}{mm}$ hoc eſt, $lmm \infty n^3$, erit ſimiliter x radix æquationis propoſitæ æqualis ipſi l & $\frac{n^3}{mm}$. Præterea ſi $x^3 - lxx$ eſt realis, hoc eſt, x major quàm l, erit quoque $n^3 - mmx$ realis, & conſequenter $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x. Quòd ſi autem eadem quantitas $x^3 - lxx$ nihilo minor fit, tranſponatur propoſita æquatio hâc ratione $lxx - x^3 \infty mmx - n^3$. Et quandoquidem ſupponitur

tur $lxx - x^3$ eſſe realis, hoc eſt, l major quàm x, erit $mmx - n^3$ etiam realis, & conſequenter major erit x quàm $\frac{n^3}{mm}$. Inventa eſt itaque radix æquationis propoſitæ æqualis ipſi l & ipſi $\frac{n^3}{mm}$, cùm duo hi termini æquantur. Et ſi unam tantùm habeat aut tres, quælibet earum erit intra hos limites, quando inæquales ſunt; ſi verò æquales, hoc eſt, $lmm \infty n^3$, ſubſtituto lmm loco n^3 in æquatione propoſita, & dividendo per $x - l$, cognoſcemus eam non habere aliam radicem in hoc caſu quam l.

Prop. 2. $x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem habebimus $x^3 - mmx \infty n^3 - lxx$. Quòd ſi ergo xx & mm ſunt æqualia, erit etiam xx ipſi $\frac{n^3}{l}$ æquale; & ſi xx majus eſt quam mm, erit quoque $\frac{n^3}{l}$ majus quam xx; & ſi xx minus eſt quam mm, minus quoque erit $\frac{n^3}{l}$ quam xx. Inventi itaque ſunt duo limites m & $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, quorum cuilibet æquatur radix æquationis propoſitæ, ſi fuerint æquales, hoc eſt, ſi lmm æquatur ipſi n^3; aut neceſſariò inter duos erit, ſi inæquales fuerint. Eadem eſt ratio duorum reliquorum limitum n & $\frac{mm}{l}$.

Prop. 3. $x^3 - lxx - mmx - n^3 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem erit $x^3 - lxx \infty mmx + n^3$, ideoque x major quàm l. Rurſus cum per tranſpoſitionem ſit $x^3 - mmx \infty lxx + n^3$, erit xx majus quam mm, & x major quam m, & mxx majus quam mmx. Sed per tranſpoſitionem eſt quoque $x^3 - n^3 \infty lxx + mmx$, & per conſequens x major quam n, & nxx majus quam n^3. Quin & per tranſpoſitionem propoſitæ habetur $lxx + mmx + n^3 \infty x^3$, atque inventum eſt mxx majus quam mmx, & nxx majus quam n^3. Ergo erit $lxx + mxx + nxx$ majus quam x^3. Quocirca ſi utraque pars dividatur per xx, erit $l + m + n$ major quam x. Inventa eſt itaque radix x æquationis propoſitæ major quam l, m, & n, ſed minor quam $l + m + n$.

Prop. 4. $x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem erit $x^3 + mmx \infty n^3 - lxx$, ideoque $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx. Sed eſt quoque $x^3 + lxx \infty n^3 - mmx$, ideoque $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x. At verò eſt etiam $lxx + mmx \infty n^3 - x^3$, & conſequenter n major quàm x; quare & nnx majus erit quàm x^3, & lnx majus quàm lxx. Atqui eſt $x^3 + lxx + mmx \infty n^3$. Ergo $nnx + lnx + mmx$ majus erit quàm n^3, & x major quàm $\frac{n^3}{nn + ln + mm}$. Quare inventa eſt radix x æquationis propoſitæ major quàm $\frac{n^3}{mm + ln + mm}$, at minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, $\frac{n^3}{mm}$, & n.

Prop. 5. $x^3 - lxx + mmx + n^3 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem erit $mmx + n^3 \infty lxx - x^3$, ideoque l major quàm x. Rurſus erit $x^3 + n^3 \infty lxx - mmx$, & per conſequens x major quàm $\frac{mm}{l}$. Invenimus ergo, quamlibet duarum radicum æquationis propoſitæ neceſſariò majorem eſſe quàm $\frac{mm}{l}$, & minorem quàm l: Sed per tranſpoſitionem eſt quoque $x^3 + mmx \infty lxx - n^3$, & conſequenter xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Quare & x major erit quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$.

Prop. 6. $x^3 + lxx - mmx + n^3 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem erit $x^3 + lxx \infty mmx - n^3$, ideoque x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Similiter erit $x^3 + n^3 \infty mmx - lxx$, & per conſequens $\frac{mm}{l}$ major quàm x. Rurſus erit $lxx + n^3 \infty mmx - x^3$, & conſequenter m major quàm x. Invenimus ergo, quamlibet duarum radicum æquationis propoſitæ neceſſariò majorem eſſe quàm $\frac{n^3}{mm}$, ſed minorem quàm $\frac{mm}{l}$ & m.

Pro-

Prop. 7. $x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem erit $x^3 - lxx \infty mmx - n^3$. Vnde patet, ſi x æqualis eſt ipſi l, quòd tunc quoque x ipſi $\frac{n^3}{mm}$ eſt æqualis. Ideoque ſi l æquatur ipſi $\frac{n^3}{mm}$, hoc eſt, $lmm \infty n^3$, una radicum æquationis propoſitæ æquabitur ſingulis terminorum l & $\frac{n^3}{mm}$; & ſi inæquales fuerint, neutra ex duabus radicibus æquationis propoſitæ poterit eſſe inter hos terminos. Quia videmus, cùm x major eſt quàm l, tum quoque x majorem eſſe quàm $\frac{n^3}{mm}$; & ſi minor eſt quàm l, tum ſimiliter x minorem eſſe quàm $\frac{n^3}{mm}$. Sed per tranſpoſitionem eſt etiam $x^3 - mmx \infty lxx - n^3$. Hinc ſi xx æquetur ipſi mm, erit quoque $xx \infty \frac{n^3}{l}$. Ideoque ſi fuerint hi termini mm & $\frac{n^3}{l}$ æquales, hoc eſt, $lmm \infty n^3$, una radicum æquationis propoſitæ major erit unoquoque terminorum æqualium m & $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$; & ſi inæquales fuerint, neutra duarum radicum æquationis propoſitæ erit inter duos ex his terminis. Præterea per tranſpoſitionem eſt quoque $x^3 + n^3 \infty lxx + mmx$, ideoque $lxx + mmx$ majus quàm x^3, & $lx + mm$ majus quàm xx. At x erit realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm m, ſi æquatio propoſita fuerit realis. Et ſi æqualis fuerit vel major quàm m, erit & $lx + mx$ majus quàm xx, ac per conſequens $l + m$ major quàm x. Quòd ſi autem minor fuerit quàm m, multo magis $l + m$ major erit quàm x. Porrò ex hac eadem æquatione conſtat, quòd $lxx + mmx$ etiam majus eſt quàm n^3. Hinc cum $l + m$ major ſit quàm x, ideoque $llx + lmx$ majus quàm lxx; erit quoque $llx + lmx + mmx$ majus quàm n^3, & x major quàm $\frac{n^3}{ll + lm + mm}$. Invenimus igitur, quòd quælibet radicum æquationis propoſitæ major eſt quàm $\frac{n^3}{ll + lm + mm}$, & multo major quàm $\frac{n^3}{ll + 2lm + mm}$, at minor quàm $l + m$. Denique, quoniam $l + m$ major eſt quàm x, ſi major fuerit x quàm m, erit inter hoſce terminos $l + m$ & m. Quòd ſi verò m major eſt quàm x, invenimus, quòd $lxx + mmx$ eſt ma-

jus.

jus quàm n^3, hinc $lmx + mmx$ multo magis erit majus quàm n^3; adeoque x major quàm $\frac{n^3}{lm + mm}$, & conſequenter x major quàm minor horum duorum terminorum m & $\frac{n^3}{lm + mm}$.

CAPVT V.

De Æquationibus quatuor dimenſionum, ſecundo & tertio termino carentibus.

Prop. 1. $x^4 * * - n^3 x + p^4 \infty 0$.

PEr tranſpoſitionem eſt $x^4 \infty n^3 x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Sed per tranſpoſitionem eſt quoque $p^4 \infty n^3 x - x^4$, & conſequenter n^3 major quàm x^3, ac n major quàm x. Ergo utraque radix x æquationis propoſitæ major erit quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minor quàm n.

Prop. 2. $x^4 * * - n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - n^3 x \infty p^4$, ideoque x^3 major quàm n^3, & x major quàm n, & $nnxx$ majus quàm $n^3 x$. Sed eſt quoque $x^4 - p^4 \infty n^3 x$, ideoque x^4 majus quàm p^4, & x major quàm p, & $ppxx$ majus quàm p^4. At per tranſpoſitionem eſt etiam $n^3 x + p^4 \infty x^4$. Ergo $nnxx + ppxx$ majus erit quàm x^4. Hinc diviſâ utraque parte per xx, erit xx minus quàm $nn + pp$, & x minor quàm $\sqrt{nn + pp}$. Invenimus igitur, quòd radix æquationis propoſitæ eſt major quàm n & p, ſed minor quàm $\sqrt{nn + pp}$, ac proinde multo minor quam $n + p$.

Prop. 3. $x^4 * * + n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem erit $x^4 \infty p^4 - n^3 x$, ac per conſequens $\frac{p^4}{n^3}$ major quàm x. Similiter erit $n^3 x \infty p^4 - x^4$, & conſequenter p^4 majus quàm x^4, & p major quàm x, & $p^3 x$ majus quàm x^4. Sed eſt præterea $x^4 + n^3 x \infty p^4$, ideoque $p^3 x + n^3 x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{p^3 + n^3}$. Invenimus itaque, quòd radix æquationis propoſitæ eſt major quàm $\frac{p^4}{p^3 + n^3}$, at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$ & p.

CAPVT VI.

De Æquationibus quatuor dimenſionum, in quibus tertius & quartus terminus deficiunt.

Prop. 1. $x^4 - lx^3 * * + p^4 \infty 0$.

PEr tranſpoſitionem eſt $x^4 \infty + lx^3 - p^4$, idéoque x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$. At verò eſt etiam $p^4 \infty lx^3 - x^4$, & conſequenter l major quàm x. Invenimus igitur, quòd unaquæque duarum radicum æquationis propoſitæ eſt major quàm $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, at minor quàm l. Hinc quoniam l major eſt quàm x, & lx^3 majus quàm p^4, habebitur $llxx$ majus quàm p^4, & conſequenter xx majus quàm $\frac{p^4}{ll}$, & x major quàm $\frac{pp}{l}$.

Prop. 2. $x^4 - lx^3 * * - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - lx^3 \infty p^4$, ideoque x major quàm l. Similiter eſt $x^4 - p^4 \infty lx^3$, & conſequenter x^4 majus quàm p^4, & x major quàm p, ac proinde px^3 majus quàm p^4. Sed eſt etiam $lx^3 + p^4 \infty x^4$. Ergo $lx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4, & $l+p$ major quàm x. Invenimus igitur, quòd radix x æquationis propoſitæ major eſt quàm l & p, at minor quàm $l+p$.

Prop. 3. $x^4 + lx^3 * * - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 \infty p^4 - lx^3$ ideoque $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3. Similiter eſt $lx^3 \infty p^4 - x^4$, ac per conſequens p major quàm x, & px^3 majus quàm x^4. Atqui eſt etiam $x^4 + lx^3 \infty p^4$. Ergo $lx^3 + px^3$ majus erit quàm p^4, & x^3 major quàm $\frac{p^4}{l+p}$. Quare invenimus, quòd radix x æquationis propoſitæ major eſt quàm $\sqrt{C.\frac{p^4}{l+p}}$, ſed minor quàm p & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$. Facillimè verò evitantur extractiones radicum cubicarum, ſumendo terminos paulò majores aut minores, prout neceſſitas requirit. Atque in hoc ca-

ſu, quoniam x^3 major eſt quàm $\frac{p^4}{l+p}$, & p major quàm x, erit pxx majus quàm $\frac{p^4}{l+p}$, & xx majus quàm $\frac{p^4}{lp+pp}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{lp+pp}}$. Præterea, quandoquidem $\frac{p^4}{l}$ majus eſt quàm x^3, erit $\frac{p^4x}{l}$ majus quàm x^4; & $lppx$ majus quàm lx^3, quia p major eſt quàm x. Atqui eſt $x^4+lx^3 \propto p^4$. Ergo $\frac{p^4x}{l}+lppx$ majus erit quàm p^4. Hinc, multiplicatâ utrâque parte per l, & diviſâ per pp, habebitur $ppx+llx$ majus quàm lpp, & x major quàm $\frac{lpp}{ll+pp}$.

De æquationibus quatuor dimenſionum, in quibus ſecundus & quartus terminus deficiunt, nihil addimus: ſiquidem illæ ad quadratas referuntur, ita ut ipſarum limites eodem modo quo quadratarum inveniri poſſint.

CAPVT VII.

De Æquationibus quatuor dimenſionum, ſecundo termino carentibus.

Prop. I. $x^4 * - mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$.

PEr tranſpoſitionem erit $x^4 - mmxx \propto p^4 - n^3x$. Vnde apparet, quòd, ſi fuerit xx æquale ipſi mm, hoc eſt, $x \propto m$, etiam x ipſi $\frac{p^4}{n^3}$ ſit æqualis futura. Ideoque ſi fuerit m æqualis ipſi $\frac{p^4}{n^3}$, hoc eſt, $mn^3 \propto p^4$, radix x æquationis propoſitæ æquabitur ſingulis terminorum m & $\frac{p^4}{n^3}$; & ſi inæquales fuerint, unaquæque radicum æquationis propoſitæ, ſive unam ſive tres habuerit, ſemper erit inter duos hoſce terminos. Præterea cognoſcitur, ſi duo hi termini fuerint æquales, hoc eſt, $mn^3 \propto p^4$, ſubſtituto mn^3 loco p^4 in æquatione propoſita, eâque diviſâ per $x-m$, fore, ut non poſſit habere aliam radicem realem præter m.

Prop.

Prop. 2. $x^4 * + mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$.

Per tranſpoſitionem habebimus $x^4 - n^3x \propto p^4 - mmxx$. Vnde conſtat, ſi x æqualis fuerit ipſi n, fore etiam $xx \propto \frac{p^4}{mm}$; hoc eſt, $x \propto \sqrt{\frac{p^4}{mm}}$ aut $\frac{pp}{m}$; & ſi fuerit $n \propto \sqrt{\frac{p^4}{mm}}$ aut $\frac{pp}{m}$, tunc radicem æquationis fore æqualem cuilibet horum terminorum; & ſi inæquales fuerint, tunc eam neceſſariò futuram inter hoſce duos. Idem demonſtrabitur de duobus reliquis p & $\frac{n^3}{mm}$; nempe ſi fuerint æquales, radix æquationis propoſitæ æquabitur unicuique illorum duorum; ſin inæquales, neceſſariò conſtituetur inter duos, tranſpoſitâ ſcilicet æquatione in hunc modum $x^4 - p^4 \propto n^3x - mmxx$.

Prop. 3. $x^4 * - mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$.

Per tranſpoſitionem erit $x^4 - mmxx \propto n^3x + p^4$, ideoque xx majus quàm mm, & x major quàm m, & mx^3 majus quàm $mmxx$. Sed eſt etiam $x^4 - n^3x \propto mmxx + p^4$, ideoque x^3 major quàm n^3, & x major quàm n, & nx^3 majus quàm n^3x. Eodem modo eſt $x^4 - p^4 \propto mmxx + n^3x$, & conſequenter x^4 majus quàm p^4, & x major quàm p, & px^3 majus quàm p^4. Atqui per tranſpoſitionem eſt quoque $mmxx + n^3x + p^4 \propto x^4$. Quare $mx^3 + nx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4, & $m + n + p$ major quàm x. Conſimili ratione demonſtrabitur, quòd $mmxx + nnxx + ppxx$ majus erit quàm x^4, & conſequenter $mm + nn + pp$ majus quàm xx. Invenimus ergo, quòd radix x propoſitæ æquationis major eſt quàm m, n, & p, at minor quàm $m + n + p$, & $\sqrt{mm + nn + pp}$.

Prop. 4. $x^4 * + mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 + mmxx \propto p^4 - n^3x$, ideoque $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Similiter eſt $x^4 + n^3x \propto p^4 - mmxx$, ac per con-

ſequens $\frac{p^4}{mm}$ majus quàm xx, hoc eſt, $\frac{pp}{m}$ majus quàm x. Atqui eſt quoque $mmxx + n^3x \infty p^4 - x^4$, & conſequenter p^4 majus quàm x^4, ac p major quàm x, & p^3x majus quàm x^4, nec non $mmpx$ majus quàm $mmxx$. Sed eſt etiam $x^4 + mmxx + n^3x \infty p^4$. Quare $p^3x + mmpx + n^3x$ majus eſt quàm p^4, ac per conſequens, diviſâ utrâque parte per $p^3 + mmp + n^3$, erit radix x propoſitæ æquationis major quàm $\frac{p^4}{p^3 + mmp + n^3}$; at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, $\frac{pp}{m}$, & p.

Prop. 5. $x^4 * - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $n^3x + p^4 \infty mmxx - x^4$, ideoque mm majus quàm xx, & m major quàm x. Similiter eſt $x^4 + p^4 \infty mmxx - n^3x$, & conſequenter x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Præterea eſt $x^4 + n^3x \infty mmxx - p^4$, ac per conſequens xx majus quàm $\frac{p^4}{mm}$, hoc eſt, x major quàm $\frac{pp}{m}$. Invenimus ergo quamlibet radicum æquationis propoſitæ majorem eſſe quàm $\frac{n^3}{mm}$ & $\frac{pp}{m}$, at minorem quàm m.

Prop. 6. $x^4 * + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 + mmxx \infty n^3x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Sed eſt etiam $x^4 + p^4 \infty n^3x - mmxx$, ac per conſequens $\frac{n^3}{mm}$ majus quàm x. Similiter eſt $x^4 + mmxx + p^4 \infty n^3x$, ideoque n^3 major quàm x^3, & n major quàm x. Invenimus ergo quamlibet duarum radicum æquationis propoſitæ majorem eſſe quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minorem quàm $\frac{n^3}{mm}$ & n.

Prop. 7. $x^4 * - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - mmxx \infty n^3x - p^4$. Vnde patet,

tet, ſi xx æquatur ipſi mm, hoc eſt, $x \propto m$, eandem x fore æqualem ipſi $\frac{p^4}{n^3}$; ac per conſequens, ſi fuerint termini hi m & $\frac{p^4}{n^3}$ æquales, erit una radicum æquationis propoſitæ æqualis ſingulis ipſorum; & ſi inæquales fuerint; neutra duarum radicum æquationis propoſitæ poterit eſſe inter illos duos m & $\frac{p^4}{n^3}$. Eodem modo per tranſpoſitionem eſt $x^4 - n^3 x \propto mmxx - p^4$. Vnde ſimiliter diſcimus, ſi x^3 æquatur ipſi n^3, hoc eſt, $x \propto n$, fore etiam $xx \propto \frac{p^4}{mm}$, hoc eſt, $x \propto \frac{pp}{m}$. Ideoque ſi hi termini n & $\frac{pp}{m}$ fuerint æquales, una ex radicibus æquationis propoſitæ æquabitur ſingulis eorundem terminorum; ſin verò inæquales fuerint, nulla radicum æquationis propoſitæ inter illos duos conſtituta erit. Præterea per tranſpoſitionem eſt $x^4 + p^4 \propto mmxx + n^3 x$, ideoque $mmxx + n^3 x$ majus quàm x^4, & $mmx + n^3$ majus quàm x^3. Porrò, ſi propoſita æquatio eſt realis, erit x realis, & æqualis, vel major, vel minor quàm n. Si fuerit æqualis vel major, erit $mmx + nnx$ majus quàm x^3, & $mm + nn$ majus quàm xx, hoc eſt, x minor erit quàm $\sqrt{mm + nn}$. Si fuerit x minor quàm n, minor etiam erit quàm $\sqrt{mm + nn}$. Quare patet, quamlibet radicum æquationis propoſitæ neceſſariò minorem eſſe quàm $\sqrt{mm + nn}$. Denique exiſtente $x^4 + p^4 \propto mmxx + n^3 x$, erit ſimiliter $mmxx + n^3 x$ majus quàm p^4. Et quia inventa eſt $\sqrt{mm + nn}$ major quàm x, erit conſequenter $mmx\sqrt{mm + nn}$ majus quàm $mmxx$, ideoque $mmx\sqrt{mm + nn}, + n^3 x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{mm\sqrt{mm + nn}, + n^3}$. Quare inventus eſt terminus unus major & alter minor quàm quælibet duarum radicum æquationis propoſitæ. Atque ita modo ſequenti capite obſervato propoſitione ſeptimâ demonſtrari poteſt, quòd x major eſt quàm minor horum terminorum n & $\frac{p^4}{mmn + n^3}$.

CAPVT VIII.

De Æquationibus quatuor dimenſionum, penultimo termino carentibus.

Prop. 1. $x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0$.

PEr tranſpoſitionem eſt $x^4 - lx^3 \infty p^4 - mmxx$. Vnde conſtat, ſi x eſt æqualis ipſi l, etiam xx æquari $\frac{p^4}{mm}$, hoc eſt, $x \infty \frac{pp}{rr}$ ideoque ſi l æqualis eſt ipſi $\frac{pp}{m}$, hoc eſt, $lm \infty pp$, erit radix æquationis propoſitæ æqualis ſingulis terminorum l & $\frac{pp}{m}$; & ſi fuerint inæquales, unaquæque radicum æquationis propoſitæ, ſive unam, ſive tres habuerit, ſemper erit inter hos terminos; ſed ſi fuerint æquales, hoc eſt, $lm \infty pp$, & $llmm \infty p^4$, ſubſtituto $llmm$ loco p^4 in æquatione propoſita, eâque diviſâ per $x - l$, cognoſcemus in hoc caſu non haberi aliam radicem veram præter l.

Prop. 2. $x^4 + lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - mmxx \infty p^4 - lx^3$. Vnde conſtat, ſi fuerit $x \infty m$, etiam $\sqrt{C.\,\frac{p^4}{l}}$ æquari ipſi x; ideoque ſi duo termini m & $\sqrt{C.\,\frac{p^4}{l}}$ ſint æquales, erit radix æquationis æqualis ſingulis horum terminorum; ſin verò inæquales fuerint, erit illà neceſſariò inter duos. Similiter per tranſpoſitionem eſt $x^4 - p^4 \infty mmxx - lx^3$. Vnde diſcimus, quòd ſi x æqualis eſt ipſi p, fore quoque eam æqualem ipſi $\frac{mm}{l}$; ideoque ſi termini p & $\frac{mm}{l}$ æquantur, erit radix æquationis æqualis unicuique illorum; ſed ſi inæquales fuerint, erit illa neceſſariò inter utroſque conſtituta.

Prop. 3. $x^4 - lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - lx^3 \infty mmxx + p^4$, ideoque x major

major quàm l. Sed & per tranſpoſitionem eſt $x^4 - mmxx \infty lx^3 + p^4$, ideoque x major quàm m, & mx^3 majus quàm $mmxx$. Similiter per tranſpoſitionem eſt $x^4 - p^4 \infty lx^3 + mmxx$, ideoque x major quàm p, & px^3 majus quàm p^4. Præterea per tranſpoſitionem propoſitionis eſt $lx^3 + mmxx + p^4 \infty x^4$, ideoque $lx^3 + mx^3 + px^3$, majus quàm x^4, & $l+m+p$ majus quàm x. Quare invenimus radicem x æquationis propoſitæ majorem eſſe quàm l, m, & p, at minorem quàm $l+m+p$. Denique per tranſpoſitionem eſt $x^4 \infty lx^3 + mmxx + p^4$, ideoque x^4 majus quàm $lx^3 + mmxx$, & xx majus quàm $lx+mm$. Atqui demonſtratum eſt ſuperiùs x majorem eſſe quàm l, ác proinde ll minus quam lx. Multò igitur magis xx majus erit quàm $ll+mm$, & x major quàm $\sqrt{ll+mm}$. Non diſſimili ratione demonſtrabitur, quòd x major eſt quàm $\sqrt{\sqrt{l^4+p^4}}$, $\sqrt{\sqrt{m^4+p^4}}$, & $\sqrt{\sqrt{mmpp+p^4}}$.

Prop. 4. $x^4 + lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 + lx^3 \infty p^4 - mmxx$, ideoque $\frac{p^4}{mm}$ majus quàm xx, & $\frac{pp}{m}$ majus quàm x. Similiter eſt $x^4 + mmxx \infty p^4 - lx^3$, ac per conſequens p major quàm x, & $ppxx$ majus quàm x^4, & $llpp$ majus quàm lx^3. Sed per tranſpoſitionem propoſitionis eſt etiam $x^4 + lx^3 + mmxx \infty p^4$. Quare $ppxx + lpxx + mmxx$ majus erit quàm p^4, & xx majus quàm $\frac{p^4}{pp+lp+mm}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{pp+lp+mm}}$. At verò exiſtente $x^4 + lx^3 + mmxx \infty p^4$, erit quoque p^4 majus quàm lx^3, ideoque $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3, & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$ majus quàm x. Inventa igitur eſt radix x æquationis propoſitæ major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{pp+lp+mm}}$; at minor quàm $\frac{pp}{m}$, $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, & p.

Prop. 5. $x^4 - lx^3 + mmxx * + p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $mmxx + p^4 \infty lx^3 - x^4$, ideoque l major

jor quàm x. Deinde eſt $x^4 + p^4 \infty l x^3 - m m x x$, ac per conſequens x major quàm $\frac{m m}{l}$. Præterea eſt $x^4 + m m x x \infty l x^3 - p^4$, ac proinde x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$, & x major quàm $\sqrt{C.} \frac{p^4}{l}$. Invenimus igitur, unamquamque duarum radicum æquationis propoſitæ majorem eſſe quàm $\frac{m m}{l}$ & $\sqrt{C.} \frac{p^4}{l}$, at minorem quàm l.

Prop. 6. $x^4 + l x^3 - m m x x * + p^4 \infty o.$

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 + p^4 \infty m m x x - l x^3$, ideoque $\frac{m m}{l}$ majus quàm x. Deinde eſt $l x^3 + p^4 \infty m m x x - x^4$, ac proinde m major quàm x. Præterea eſt $x^4 + l x^3 \infty m m x x - p^4$, & conſequenter $x x$ majus quàm $\frac{p^4}{m m}$, hoc eſt, x major quàm $\frac{p p}{m}$. Invenimus ergo, unamquamque duarum radicum æquationis propoſitæ majorem eſſe quàm $\frac{p p}{m}$, at minorem quàm $\frac{m m}{l}$ & m.

Prop. 7. $x^4 - l x^3 - m m x x * + p^4 \infty o.$

Per tranſpoſitionem habebimus $x^4 - l x^3 \infty m m x x - p^4$. Vnde patet, ſi x æqualis eſt ipſi l, ipſam x quoque fore æqualem ipſi $\frac{p p}{m}$; & per conſequens, ſi fuerint termini l & $\frac{p p}{m}$ æquales, erit una radicum æquationis propoſitæ æqualis ſingulis illorum; & ſi fuerint inæquales, neutra duarum radicum æquationis propoſitæ poterit eſſe inter illos duos conſtituta. Eodem modo per tranſpoſitionem eſt $x^4 - m m x x \infty l x^3 - p^4$. Vnde ſimiliter conſtat, ſi fuerit x æqualis ipſi m, fore quoque x æqualem ipſi $\sqrt{C.} \frac{p^4}{l}$; ideoque ſi æquales fuerint m & $\sqrt{C.} \frac{p^4}{l}$, una radicum æquationis propoſitæ æqualis erit cuilibet horum terminorum æqualium; & ſi fuerint inæquales, nulla radicum æquationis propoſitæ erit inter illos duos conſtituta. Porrò per tranſpoſitionem eſt quoque $x^4 + p^4 \infty l x^3 + m m x x$, unde $l x^3 + m m x x$ majus erit quàm x^4, & $l x + m m$ majus quàm $x x$. Iam ſi fuerit æquatio propoſita realis,

lis, erit x vel æqualis, vel major, vel minor quàm m, & $l+m$ major quàm x. Quòd ſi fuerit x minor quàm m, multo magis ipſa minor erit quàm $l+m$.

Deinde ex eadem æquatione $x^4+p^4 \propto lx^3+mmxx$ etiam conſtat, quòd lx^3+mmxx majus eſt quàm p^4. Atqui inventa eſt $l+m$ major quàm x. Ergo $llxx+lmxx$ majus erit quàm lx^3, & $llxx+lmxx+mmxx$ majus quàm p^4, ideoque xx majus quàm $\frac{p^4}{ll+lm+mm}$. Hinc cum $llxx+2lmxx+mmxx$ multò majus ſit quàm p^4, erit quoque per conſequens $lx+mx$ majus quàm pp, & x major quàm $\frac{pp}{l+m}$. Quare invenimus quamlibet duarum radicum æquationis propoſitæ majorem eſſe quàm $\sqrt{\frac{p^4}{ll+lm+mm}}$ & $\frac{pp}{l+m}$, at minorem quàm $l+m$.

Cæterùm quoniam invenimus, quòd x neceſſariò eſt minor quàm $l+m$; patet, ſi x ſupponitur major quàm m, eam fore inter hos terminos $l+m$ & m. Quòd ſi m fuerit æqualis aut major quàm x; quoniam lx^3+mmxx majus eſt quàm p^4, erit & $lmxx+mmxx$ majus quàm p^4, & xx majus quàm $\frac{p^4}{lm+mm}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{lm+mm}}$. Quare unaquæque duarum radicum æquationis propoſitæ major erit quàm minor duorum terminorum m & $\sqrt{\frac{p^4}{lm+mm}}$, at minor quàm $l+m$.

CAPVT IX.

De limitibus Æquationum quatuor dimenſionum tertio termino carentium.

$$\textit{Prop. 1.} \quad x^4 - lx^3 * + n^3x - p^4 \propto 0.$$

PEr tranſpoſitionem eſt $x^4 - lx^3 \propto p^4 - n^3x$. Vnde patet, quòd ſi x æqualis eſt ipſi l, fore quoque x æqualem ipſi $\frac{p^4}{n^3}$; ideoquè ſi fuerit l æqualis ipſi $\frac{p^4}{n^3}$, hoc eſt, $ln^3 \propto p^4$, radix æqua-

tionis propoſitæ æqualis erit ſingulis terminorum l & $\frac{p^4}{n^3}$; & ſi fuerint inæquales, unaquæque radicum æquationis propoſitæ, ſive unam, ſive tres habuerit, ſemper erit inter hos terminos. Præterea cognoſcimus, quòd, ſi fuerint hi ultimi termini æquales, hoc eſt, $ln^3 \infty p^4$, ſubſtituto in æquatione propoſita ln^3 loco p^4, & diviſâ æquatione per $x - l$, ipſa non poſſit aliam habere veram radicem quàm l.

Prop. 2. $x^4 + lx^3 * - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - n^3x \infty p^4 - lx^3$. Vnde conſtat, ſi x æqualis eſt ipſi n, fore quoque $x^3 \infty \frac{p^4}{l}$, hoc eſt, $x \infty \sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$; & ſi fuerit n æqualis ipſi $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, radix æquationis æquabitur ſingulis horum terminorum; & ſi fuerint inæquales, erit neceſſariò inter duos. Deinde per tranſpoſitionem eſt $x^4 - p^4 \infty n^3x - lx^3$. Vnde patet, ſi fuerit x æqualis ipſi p, fore quoque $xx \infty \frac{n^3}{l}$, hoc eſt, $x \infty \sqrt{\frac{n^3}{l}}$; ideoque ſi fuerit p æqualis ipſi $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, radix æquationis propoſitæ æquabitur ſingulis horum terminorum, & ſi fuerint inæquales, erit neceſſariò inter utroſque.

Prop. 3. $x^4 - lx^3 * - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - lx^3 \infty n^3x + p^4$, ideoque x major quàm l. Eodem modo eſt $x^4 - n^3x \infty lx^3 + p^4$, ac proinde x major quàm n, & nx^3 majus quàm n^3x. Similiter eſt $x^4 - p^4 \infty lx^3 + n^3x$, ideoque x major quàm p, & px^3 majus quàm p^4. Sed per tranſpoſitionem eſt quoque $lx^3 + n^3x + p^4 \infty x^4$. Quare $lx^3 + nx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4, & $l + n + p$ major quàm x. Ergo invenimus radicem x æquationis propoſitæ majorem eſſe quàm $l, n,$ & p, at minorem quàm $l + n + p$. Porrò ex hac æquatione $lx^3 + n^3x + p^4 \infty x^4$ etiam conſtat, quod $lx^3 + n^3x$ eſt minus quàm x^4: & quandoquidem invenimus l minorem eſſe quàm x, erit l^3x minus quàm lx^3, ideoque $l^3x + n^3x$ multo minus quàm x^4, & x^3 major quàm $l^3 + n^3$. Non diſſimili ratione demonſtrabitur, quòd x major eſt quàm $\sqrt{\sqrt{l^4 + p^4}}$ & $\sqrt{\sqrt{ln^3 + p^4}}$.

Pro-

Prop. 4. $x^4 + lx^3 * + n^3x - p^4 \propto 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 + lx^3 \propto p^4 - n^3x$, ideoque $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Eodem modo eſt $x^4 + n^3x \propto p^4 - lx^3$, ac proinde $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3. Similiter eſt $lx^3 + n^3x \propto p^4 - x^4$, & per conſequens p major quàm x, & p^3x majus quàm x^4, ac $lppx$ majus quàm lx^3. Sed per tranſpoſitionem propoſitionis eſt quoque $x^4 + lx^3 + n^3x \propto p^4$. Quare $p^3x + lppx + n^3x$ majus erit quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{p^3 + lpp + n^3}$. Et ſic inventa eſt radix x æquationis propoſitæ major quàm $\frac{p^4}{p^3 + lpp + n^3}$, at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, & p.

Prop. 5. $x^4 - lx^3 * + n^3x + p^4 \propto 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $n^3x + p^4 \propto lx^3 - x^4$, ideoque l major quàm x. Deinde eſt $x^4 + p^4 \propto lx^3 - n^3x$, quare erit xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$, hoc eſt, x major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$. Sed eſt quoque $x^4 + n^3x \propto lx^3 - p^4$, ideoque x^3 majus quàm $\frac{p^4}{l}$, & x major quàm $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$. Quare invenimus, quòd quælibet duarum radicum æquationis propoſitæ neceſſariò major eſt quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, at minor quàm l.

Prop. 6. $x^4 + lx^3 * - n^3x + p^4 \propto 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 + p^4 \propto n^3x - lx^3$, ideoque $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx; hoc eſt, x minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$. Deinde eſt $x^4 + lx^3 \propto n^3x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Præterea eſt $lx^3 + p^4 \propto n^3x - x^4$, & idcirco n^3 major quàm x^3, hoc eſt, x minor quàm n. Ergo invenimus, unamquamque duarum radicum x æquationis propoſitæ majorem eſſe quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minorem quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & n.

Prop. 7. $x^4 - lx^3 * - n^3 x + p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem habebimus $x^4 - lx^3 \infty n^3 x - p^4$. Vnde patet, ſi x æqualis eſt ipſi l, fore quoque x æqualem ipſi $\frac{p^4}{n^3}$; & per conſequens, ſi fuerint hi termini l & $\frac{p^4}{n^3}$ æquales, hoc eſt, $ln^3 \infty p^4$, una ex radicibus æquationis propoſitæ æqualis erit ſingulis horum terminorum æqualium l & $\frac{p^4}{n^3}$; & ſi inæquales fuerint, neutra duarum radicum æquationis propoſitæ poterit eſſe inter ipſos. Deinde per tranſpoſitionem eſt $x^4 - n^3 x \infty lx^3 - p^4$. Vnde ſimili modo patet, ſi x æquatur ipſi n, ipſam x quoque æquari ipſi $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$; ideoque ſi termini hi n & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$ æquales fuerint, una radicum æquationis propoſitæ æquabitur ſingulis horum terminorum æqualium; & ſi fuerint inæquales, nulla radicum æquationis propoſitæ erit inter utroſque. Porrò per tranſpoſitionem eſt quoque $x^4 + p^4 \infty lx^3 + n^3 x$, ideoque $lx^3 + n^3 x$ majus quàm x^4, & $lxx + n^3$ majus quàm x^3. Iam ſi fuerit propoſita æquatio realis, erit x realis, & vel æqualis, vel major vel minor quàm m. Quòd ſi fuerit æqualis vel major, erit $lxx + nxx$ majus quàm x^3. Sin verò minor ſit, erit x multò minor quàm $l + n$. Quare utraque duarum radicum propoſitæ æquationis neceſſariò minor erit quàm $l + n$. Quin & exiſtente $x^4 + p^4 \infty lx^3 + n^3 x$, erit quoque $lx^3 + n^3 x$ majus quàm p^4. Atqui invenimus $l + n$ majorem eſſe quàm x, ac proinde $ll + nn + 2ln$ majus quàm xx, & $l^3 + lnn + 2lln$ majus quàm lxx, nec non $l^3 x + lnnx + 2llnx$ majus quàm lx^3. Ergo $l^3 x + lnnx + 2llnx + n^3 x$ majus erit quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{l^3 + lnn + 2lln + n^3}$. Et quandoquidem cubus ex $l + n$ major eſt quàm $l^3 + lnn + 2lln + n^3$, multò magis erit x major quàm p^4 diviſum per cubum ex $l + n$. Invenimus itaque quòd quælibet duarum radicum æquationis propoſitæ major eſt quàm p^4 diviſum per cubum ex $l + n$, ut & major quàm $\frac{p^4}{l^3 + lnn + 2lln + n^3}$, at minor quàm $l + n$. Præterea, quoniam $l + n$ major eſt quàm x, ſi fuerit x

major

major quàm n, erit neceſſariò inter hos terminos $l + n$ & n. Quòd ſi verò n fuerit vel æqualis vel major quàm x, quia $lx^3 + n^3x$ majus eſt quàm p^4, erit & $lnnx + n^3x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{lnn + n^3}$. Ac proinde quælibet radicum æquationis propoſitæ major erit quàm minor horum terminorum n & $\frac{p^4}{lnn + n^3}$, at minor quàm $l + n$.

CAPVT X.

De limitibus Æquationum quatuor dimenſionum, in quibus nullus terminus deeſt.

Prop. I. $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

PEr tranſpoſitionem eſt $lx^3 + n^3x \infty x^4 + mmxx + p^4$, ideoque $lx^3 + n^3x$ majus quàm x^4, & $lxx + n^3$ majus quàm x^3. Iam ſi fuerit propoſita æquatio realis, erit & x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm n. Quòd ſi fuerit æqualis vel major, erit $lxx + nxx$ majus quàm x^3, hoc eſt, $l + n$ major quàm x, & x minor quàm n. Multò igitur magis minor erit quàm $l + n$. Ergo x neceſſariò minor erit quàm $l + n$. Deinde ex eadem æquatione $lx^3 + n^3x \infty x^4 + mmxx + p^4$ conſtat, eſſe $lx^3 + n^3x$ majus quàm p^4. Sed inventa eſt $l + n$ major quàm x, ac per conſequens $ll + nn + 2ln$ majus quàm xx, & $l^3x + lnnx + 2llnx$ majus quàm lx^3. Quare erit $l^3x + lnnx + 2llnx + n^3x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{l^3 + lnn + 2lln + n^3}$; & quandoquidem cubus ex $l + n$ major eſt quàm $l^3 + lnn + 2lln + n^3$, multò magis erit x major quàm p^4 diviſum per cubum ex $l + n$. Inventus eſt itaque terminus unus major & alter minor quàm unaquæque radicum æquationis propoſitæ, ſive hæc duas ſive quatuor radices habuerit. Præterea, quoniam invenimus, quòd $l + n$ ſemper major eſt quàm x, ſi ponatur x quoque major quàm n; manifeſtum eſt eam eſſe inter duos terminos $l + n$ & n. Quòd ſi autem x fuerit æqualis vel minor quàm n, quoniam eſt $lx^3 + n^3x$ majus quàm p^4; erit $lnnx + n^3x$

majus quàm p^4, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{lnn + n^3}$. Ergo unaquæque radicum propoſitæ æquationis, ſive duas, ſive tres habuerit, major erit quàm minor horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{lnn+n^3}$, at minor quàm $l+n$.

Prop. 2. $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $mmxx + n^3x + p^4 \infty lx^3 - x^4$, ideoque l major quàm x. Similiter eſt $x^4 + n^3x + p^4 \infty lx^3 - mmxx$, ac idcirco x major quàm $\frac{mm}{l}$. Præterea eſt $x^4 + mmxx + p^4 \infty lx^3 - n^3x$, ac per conſequens xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Denique eſt $x^4 + mmxx + n^3x \infty lx^3 - p^4$, & conſequenter x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$. Quare invenimus, unamquamque duarum radicum æquationis propoſitæ majorem eſſe quàm $\frac{mm}{l}$, $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, at minorem quàm l.

Prop. 3. $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $lx^3 + mmxx + n^3x \infty x^4 + p^4$, ideoque $lx^3 + mmxx + n^3x$ majus quàm x^4. Iam ſi propoſita æquatio fuerit realis, erit x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm maxima duarum m & n. Quòd ſi fuerit æqualis vel major, erit $lx^3 + mx^3 + nx^3$ majus quàm x^4, & $l + m + n$ major erit quàm x, & magis ſi fuerit x minor quàm maxima duarum m & n. Quare $l + m + n$ erit neceſſario major quàm x. Præterea m erit aut æqualis, aut major, aut minor quàm n. Quòd ſi fuerit æqualis aut major, & quidem x major quàm m; erit radix æquationis propoſitæ inter hoſce terminos $l + m + n$ & m. Quòd ſi, exiſtente m æquali aut majore quàm n, etiam m ſit æqualis vel major quàm x; erit & $lmmx + m^3x + n^3x$

$+ n^3 x$ æquale aut majus quàm $lx^3 + mmxx + n^3 x$, ac per conſequens majus quàm p^4; ideoque x major quàm $\frac{p^4}{lmm + m^3 + n^3}$. Vnde ſi fuerit m vel æqualis vel major quàm n, erit x neceſſariò major quàm minor horum duorum terminorum m & $\frac{p^4}{lmm + m^3 + n^3}$; & ſi n fuerit major quàm m, conſimili ratione demonſtrabitur x etiam neceſſariò majorem eſſe minore horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{lnn + mmn + n^3}$. Invenimus ergo unamquamque duarum radicum æquationis propoſitæ majorem eſſe minore horum terminorum m & $\frac{p^4}{lmm + m^3 + n^3}$, ſi m vel æqualis vel major fuerit quàm n; aut majorem minore duorum n & $\frac{p^4}{lnn + mmn + n^3}$, ſi n major ſit quàm m; at verò ſemper minorem quàm $l + m + n$.

Prop. 4. $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3 x + p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $lx^3 + mmxx \infty x^4 + n^3 x + p^4$, ideoque $lx^3 + mmxx$ majus quàm x^4, & $lx + mm$ majus quàm xx. Iam ſi fuerit propoſita æquatio realis, erit & x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm m. Quòd ſi fuerit æqualis vel major, erit $lx + mx$ majus quàm xx, & $l + m$ major quàm x; & multò magis, ſi fuerit x minor quàm m. Ergo x neceſſariò minor erit quàm $l + m$. Vnde ſi fuerit x major quàm m, erit inter hoſce terminos $l + m$ & m. Quòd ſi x fuerit vel æqualis vel minor quàm m, quandoquidem & $lx^3 + mmxx$ majus eſt quàm p^4; erit $lmxx + mmxx$ majus quàm p^4; ideoque xx majus quàm $\frac{p^4}{lm + mm}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{lm + mm}}$. Quare quælibet duarum radicum æquationis propoſitæ major erit quàm minor duorum terminorum m & $\sqrt{\frac{p^4}{lm + mm}}$, at minor quàm $l + m$.

Pro-

Prop. 5. $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$

Demonſtrabitur ex tranſpoſitionibus requiſitis n^3x fore majus quàm x^4, ideoque n majorem quàm x; & n^3x majus quàm lx^3, ac proinde $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx; & denique n^3x majus quàm p^4, & per conſequens x majorem quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Invenimus itaque terminum unum majorem ſingulis radicum æquationis propoſitæ, at verò duos alios minores.

Prop. 6. $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$

Per tranſpoſitionem eſt $mmxx + n^3x \infty x^4 + lx^3 + p^4$, ideoque $mmxx + n^3x$ majus quàm x^4, & $mmx + n^3$ majus quàm x^3. Iam ſi fuerit propoſita æquatio realis, erit x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm n. Quòd ſi fuerit æqualis vel major, erit $mmx + nnx$ majus quàm x^3, & $\sqrt{mm + nn}$ major quàm x; & multò magis, ſi fuerit x minor quàm n. Quare erit $\sqrt{mm + nn}$ ſemper major quàm x, & x erit inter terminos $\sqrt{mm + nn}$ & n, ſi major eſt quàm n. Quòd ſi fuerit æqualis aut minor quàm n, quoniam eſt $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4, erit quoque $mmnx + n^3x$ majus quàm p^4, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{mmn + n^3}$. Ergo quælibet duarum radicum æquationis propoſitæ major erit quàm minor horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{mmn + n^3}$, at minor quàm $\sqrt{mm + nn}$.

Prop. 7. $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.$

Factis tranſpoſitionibus requiſitis, demonſtrabitur eſſe x minorem quàm m & $\frac{mm}{l}$, at majorem quàm $\frac{n^3}{mm}$ & $\frac{pp}{m}$.

Prop.

Prop. 8. $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - lx^3 \infty n^3x + p^4 - mmxx$, ideoque ſi fuerit $x^4 \infty lx^3$, erit $x \infty l$, & $ln^3 \infty n^3x$, & $n^3x + p^4 \infty mmxx$, ac proinde $ln^3 + p^4 \infty mmxx$, & $x \infty \sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$. Vnde patet, ſi fuerit $l \infty \sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$, hoc eſt, ſi habeatur $llmm \infty ln^3 + p^4$; radicem æquationis propoſitæ fore æqualem ſingulis terminorum æqualium l & $\sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$: ac idcirco, ſubſtituto in hoc caſu in æquatione propoſita valore ipſius p^4, nempe $llmm - ln^3$, ipſam eſſe diviſibilem per $x - l$. Quòd ſi fuerit x^4 majus quàm lx^3, hoc eſt, x major quàm l, erit quoque $n^3x + p^4$ majus quàm $mmxx$; & ſi fuerit lx^3 majus quàm x^4, hoc eſt, l major quàm x, erit & $mmxx$ majus quàm $n^3x + p^4$. Iam quandoquidem æquatio propoſita eſt realis, erit x realis & vel æqualis, vel major, vel minor quàm p. Quòd ſi fuerit æqualis vel major quàm p, ſitque major quàm l, quoniam tunc $n^3x + p^4$ quoque majus eſt quàm $mmxx$, erit & $n^3x + p^3x$ majus quàm $mmxx$, & $\frac{n^3 + p^3}{mm}$ majus quàm x. Ergo in hoc caſu erit x major quàm l, & minor quàm $\frac{n^3 + p^3}{mm}$. Quòd ſi autem x minori exiſtente quàm l, ipſa ſit æqualis vel major quàm p, quoniam & tunc $n^3x + p^4$ minus eſt quàm $mmxx$, erit ſimiliter $n^3x + p^3x$ minùs quàm $mmxx$, & conſequenter $\frac{n^3 + p^3}{mm}$ minus quàm x. Igitur in hoc caſu erit x minor quàm l, & major quàm $\frac{n^3 + p^3}{mm}$. Quare univerſaliter apparet, æquationem propoſitam non habere præter unam radicem realem ipſi l æqualem, cùm eſt $llmm \infty ln^3 + p^4$; modò quælibet radicum, ſive unam, ſive tres habuerit, fuerit ſemper neceſſariò inter maximum & minimum trium terminorum l, $\frac{n^3 + p^3}{mm}$, & $\sqrt{\frac{n^3p + p^4}{mm}}$.

Prop. 9. $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - lx^3 \infty p^4 - mmxx - n^3x$, ideoque ſi fuerit $x^4 \infty lx^3$, hoc eſt, $x \infty l$, erit $mmxx \infty -n^3x + p^4$, & per conſequens $mmxx \infty - n^3l + p^4$, & $xx \infty \frac{p^4 - ln^3}{mm}$, & $x \infty \sqrt{\frac{p^4 - ln^3}{mm}}$. Quòd ſi ergo l æqualis eſt $\sqrt{\frac{p^4 - ln^3}{mm}}$, hoc eſt, ſi fuerit $llmm \infty p^4 - ln^3$; radix æquationis propoſitæ æqualis erit unicuique terminorum æqualium l & $\sqrt{\frac{p^4 - ln^3}{mm}}$: ideoque ſi in hoc caſu in æquatione propoſita loco p^4, ſubſtituatur ejus valor, nempe $llmm + ln^3$, apparebit ipſam dividi poſſe per $x - l$, atque nullam aliam radicem veram admittere præter l. Si verò x^4 fuerit majus quàm lx^3, hoc eſt, x major quàm l, erit & p^4 majus quàm $mmxx + n^3x$; & contra, ſi fuerit l major quàm x, erit etiam $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4. Iam ſi æquatio propoſita eſt realis, erit x realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm n. Eſto igitur, quòd x major quàm l ſit vel æqualis vel major quàm n; quare cum & p^4 tunc majus ſit quàm $mmxx + n^3x$, erit quoque p^4 majus quàm $mmnx + n^3x$; ideoque $\frac{p^4}{mmn + n^3}$ majus quàm x. Quare in hoc caſu erit x major quàm l, & minor quàm $\frac{p^4}{mmn + n^3}$. Quòd ſi x, cùm major eſt quàm l, minor fuerit quàm n, erit & p^4 majus quàm $mmxx + n^3x$, ideoque multò majus quàm $mmxx + nnxx$, & conſequenter $\frac{p^4}{mm + nn}$ majus quàm xx, & $\sqrt{\frac{p^4}{mm + nn}}$ major quàm x. Quare in hoc caſu x erit major quàm l, & minor quàm $\sqrt{\frac{p^4}{mm + nn}}$. Quòd ſi verò x, cùm minor eſt quàm l, vel æqualis fuerit vel major quàm n, erit $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4, ideoque $mmxx + nnxx$ majus quàm p^4, & xx majus quàm $\frac{p^4}{mm + nn}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{mm + nn}}$. Ergo in hoc caſu erit x

minor

minor quàm l, & major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{mm+nn}}$. Poſtremò, cùm x minor quàm l, etiam ipſa minor ſit quàm n, erit $mmxx+n^3x$ majus quàm p^4, & $mmnx+n^3x$ multò majus quàm p^4, & per conſequens x major quàm $\frac{p^4}{mmn+n^3}$. Igitur x in hoc caſu, minor erit quàm l, & major quàm $\frac{p^4}{mmn+n^3}$.

Quæ cum ita ſint, conſtat univerſaliter, æquationem propoſitam non habere niſi unam veram radicem, quæ æqualis eſt ipſi l, quando eſt $llmm \infty p^4 - ln^3$, modo unaquæque radicum, ſive unam tantùm, ſive tres habuerit, fuerit ſemper neceſſario inter maximum & minimum trium terminorum l, $\frac{p^4}{mmn+n^3}$, & $\sqrt{\frac{p^4}{mm+nn}}$.

Prop. 10. $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Factis neceſſariis tranſpoſitionibus, demonſtrabitur, quòd x major eſt quàm l, m, n, & p. Deinde erit quoque per tranſpoſitionem $lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty x^4$, & per conſequens $lx^3 + mx^3 + nx^3 + px^3$ majus quàm x^4, & $l + m + n + p$ major quàm x. Porrò, quoniam eſt $x^4 \infty lx^3 + mmxx + n^3x + p^4$, erit x^4 majus quàm $lx^3 + mmxx$, & xx majus quàm $lx + mm$, ideoque multo magis x major erit quàm $\sqrt{ll+mm}$ & $\sqrt{lm+mm}$. Similiter, cum x^3 major ſit quàm $lxx + mmx + n^3$, erit multo magis major quàm $l^3 + m^3 + n^3$, $l^3 + lmm + n^3$, & $2lmm + n^3$, & ſic de reliquis terminis, quos ſubſtituere licet loco x^3, minores quàm x^3. Sic x^4 majus eſt quàm $l^4 + m^4 + n^4$, quàm $m^4 + n^4 + p^4$, & ſic de reliquis. Præterea, quoniam x major eſt quàm n & p, & $lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty x^4$, erit $lx^3 + mmxx + nnxx + ppxx$ majus quàm x^4, ideoque $lx + mm + nn + pp$ majus quàm xx aliquâ quantitate. quæ quidem quantitas, etiamſi ſit incognita, ſi appelletur zz, habebitur $lx + mm + nn + pp \infty xx + zz$. Quantitas autem hæc incognita zz neceſſariò minor erit quàm $mm + nn + pp$, aliàs, ablatis ex duabus partibus æquationis præcedentis, æqualibus, aut minori quantitate ex pri-

ma & majori ex ſecunda, eſſet reliqua lx aut æqualis, aut major quàm xx. Quod foret abſurdum, quandoquidem x demonſtrata eſt major quàm l. Quare habemus hanc æquationem $xx \infty lx + mm + nn + pp - zz$, quæ erit realis, eritque $x \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$. Manifeſtum verò eſt, quòd $\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp$ majus eſt quàm $\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp - zz$. Ergo $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$ major erit quàm x, ideoque $\sqrt{ll + mm + nn + pp}$ multo magis major erit quàm x; ita ut radix propoſitæ æquationis neceſſariò ſit inter $\sqrt{ll + mm}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$.

Prop. 11. $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - lx^3 - mmxx \infty p^4 - n^3x$. Vnde, ſi fuerit $x^4 - lx^3 - mmxx \infty 0$, hoc eſt, omnibus per xx diviſis, $xx - lx - mm \infty 0$, erit quoque $p^4 - n^3x \infty 0$. Hoc eſt, ſi fuerit $xx \infty lx + mm$, vel $x \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; erit & $p^4 \infty n^3x$, vel $x \infty \frac{p^4}{n^3}$. Quare conſtat, ſi fuerit $\frac{p^4}{n^3} \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, radicem æquationis propoſitæ fore æqualem ſingulis terminorum æqualium $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quòd ſi fuerit x^4 majus quàm $lx^3 + mmxx$, hoc eſt, xx majus quàm $lx + mm$; erit p^4 etiam majus quàm n^3x, hoc eſt, $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Iam exiſtente xx majori quàm $lx + mm$, erit $xx \infty lx + mm$ plus aliquâ quantitate. Quæ quidem quantitas, etiamſi ſit incognita, ſi vocetur zz: habebitur $xx \infty lx + mm + zz$, & $x \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + zz}$, eritque x major quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare in hoc caſu erit x minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & major quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quòd ſi fuerit x^4 minus quàm $lx^3 + mmxx$, hoc eſt, xx minus quàm $lx + mm$; erit & p^4 minus quàm n^3x, hoc eſt, x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Hinc exiſtente xx minori quàm $lx + mm$,

erit

erit $xx \propto lx + mm$ minus aliquâ quantitate. Quæ ſi nominetur zz, habebitur $xx \propto lx + mm - zz$, hoc eſt, $x \propto \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm - zz}$, eritque x minor quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Ergo in hoc caſu erit x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & minor quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare univerſaliter patet, radicem æquationis propoſitæ æqualem eſſe ipſi $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, quando $\frac{p^4}{n^3}$ æquatur ipſi $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; Sin ſecus, quamlibet radicum, ſive unam tantùm, ſive tres habuerit, ſemper eſſe inter hoſce terminos $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$.

Prop. 12. $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - p^4 \propto n^3x - lx^3 - mmxx$; ideoque ſi fuerit $x \propto p$, erit quoque $n^3x \propto lx^3 + mmxx$, & $x \propto \frac{n^3}{lp + mm}$. Vnde conſtat, ſi $lpp + mmp$ æquetur n^3, radicem æquationis fore æqualem ſingulis terminorum æqualium p & $\frac{n^3}{lp + mm}$. Quòd ſi fuerit x^4 majus quàm p^4, hoc eſt, x major quàm p, erit quoque n^3x majus quàm $lx^3 + mmxx$. Iam ſi æquatio propoſita eſt realis, erit & x realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm m. Quòd ſi fuerit æqualis vel major quàm m, & eadem quantitas x etiam major ſit quàm p, quandoquidem & tunc n^3x majus eſt quàm $lx^3 + mmxx$, erit n^3x majus quàm $lmxx + mmxx$, & $\frac{n^3}{lm + mm}$ majus quàm x. Quare in hoc caſu erit x major quàm p, & minor quàm $\frac{n^3}{lm + mm}$. Quòd ſi exiſtente x majore quàm p ipſa minor ſit quàm m, erit n^3x majus quàm $lx^3 + mx^3$, & $\frac{n^3}{l + m}$ majus quàm xx. Ergo in hoc caſu erit x major quàm p, & minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l + m}}$. Quòd ſi verò, x minori exiſtente quàm p, ipſa ſit major quàm m, vel eidem æqualis, quandoquidem & tunc n^3x minus eſt quàm $lx + mmxx$, erit n^3x

 minor

minor quàm $lx^3 + mx^3$, hoc eſt, xx majus quàm $\frac{n^3}{l+m}$. Quare in hoc caſu erit x minor quàm p, & major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l+m}}$. Denique, cùm fuerit x minor quàm p, & ipſa etiam minor quàm m, quoniam & tunc n^3x minus eſt quàm $lx^3 + mmxx$, erit n^3x minus quàm $lmxx + mmxx$, & x major quàm $\frac{n^3}{lm+mm}$. Vnde conſtat univerſaliter, radicem æquationis propoſitæ eſſe æqualem ſingulis terminorum æqualium p & $\frac{n^3}{lp+mm}$, cùm eſt $lpp + mmp$ æquale ipſi n^3; ſed cùm inæquales ſunt, eſſe radicem æquationis propoſitæ neceſſariò inter majorem & minorem terminorum p, $\sqrt{\frac{n^3}{l+m}}$, & $\frac{n^3}{lm+mm}$.

Prop. 13. $x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$.

Factis neceſſariis tranſpoſitionibus, demonſtrabitur x fore minorem quàm p, $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, $\sqrt{\frac{p^4}{mm}}$, & $\frac{p^4}{n^3}$; at verò majorem quàm $\frac{p^4}{p^3 + lpp + mmp + n^3}$.

Prop. 14. $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - n^3x \infty mmxx + p^4 - lx^3$; ideoque ſi fuerit $x^4 \infty n^3x$, hoc eſt, $x \infty n$, erit $mmxx + p^4 \infty lx^3$, hoc eſt, $\frac{mmnn + p^4}{l} \infty x^3$. Quòd ſi fuerit x major quàm n, erit & $mmxx + p^4$ majus quàm lx^3: ſin minor fuerit, erit $mmxx + p^4$ minus quàm lx^3. Iam, ſi x major eſt quàm n, & etiam vel æqualis vel major quàm p, quandoquidem & tunc $mmxx + p^4$ majus eſt quàm lx^3, multo magis erit $mmxx + ppxx$ majus quàm lx^3, hoc eſt, $\frac{mm+pp}{l}$ majus quàm x. Ergo in hoc caſu erit x major quàm n, & minor quàm $\frac{mm+pp}{l}$. Quòd ſi x major fuerit quàm n, & etiam minor quàm p, quoniam & tunc $mmxx + p^4$ majus eſt quàm lx^3, erit quoque $mmpp + p^4$ majus quàm lx^3, hoc eſt, x^3 minor quàm $\frac{mmpp+p^4}{l}$, & x minor quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$.

Quare

Quare in hoc caſu erit x major quàm n, & minor quàm $\sqrt{C.\,\frac{mmpp+p^4}{l}}$. Quòd ſi x minor fuerit quàm n, & vel æqualis vel major quàm p, quandoquidem & tunc $mmxx+p^4$ minus eſt quàm lx^3, erit quoque $mmpp+p^4$ minus quàm lx^3, & x major quàm $\sqrt{C.\,\frac{mmpp+p^4}{l}}$. Ergo in hoc caſu erit x minor quàm n, & major quàm $\sqrt{C.\,\frac{mmpp+p^4}{l}}$. Quòd ſi verò x minor fuerit quàm n, & ipſa etiam minor ſit quàm p, quoniam & tunc $mmxx+p^4$ minor eſt quàm lx^3; erit quoque $mmxx+ppxx$ minus quàm lx^3, & $\frac{mm+pp}{l}$ minus quàm x. Quare in hoc caſu, erit x minor quàm n, & major quàm $\frac{mm+pp}{l}$. Vnde univerſaliter apparet, radicem æquationis propoſitæ neceſſariò eſſe inter maximum & minimum trium terminorum n, $\frac{mm+pp}{l}$; & $\sqrt{C.\,\frac{mmpp+p^4}{l}}$.

Prop. 15. $x^4+lx^3-mmxx+n^3x-p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4+lx^3-mmxx \infty p^4-n^3x$; ideoque ſi fuerit $x^4+lx^3-mmxx \infty 0$, ſeu, diviſis omnibus terminis per xx, $xx+lx-mm \infty 0$; erit quoque $p^4-n^3x \infty 0$, hoc eſt, ſi eſt $xx \infty -lx+mm$, vel $x \infty -\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$ erit $p^4 \infty n^3x$, ſeu $x \infty \frac{p^4}{n^3}$. Vnde patet, ſi $\frac{p^4}{n^3}$ eſt æquale ipſi $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$, radicem æquationis propoſitæ eſſe æqualem ſingulis terminorum æqualium $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$. Quòd ſi fuerit x^4+lx^3 majus quàm $mmxx$, hoc eſt, $xx+lx$ majus quàm mm, erit quoque p^4 majus quàm n^3x, hòc eſt, $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Ac proinde cum $xx+lx$ majus ſit quàm mm, erit $xx+lx$ majus quàm mm aliquâ quantitate. Quantitas autem hæc, licèt ſit incognita, vocetur zz, eritque $xx+lx \infty mm+zz$, ſeu $xx \infty -lx+mm+zz$, hoc eſt, $x \infty -\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm+zz}$, ideoque x major quàm $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$. Ergo in hoc caſu x minor erit quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & major quàm $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$. Quòd ſi fuerit x^4+lx^3 minus

nus

nus quàm $mmxx$, hoc eſt, $xx + lx$ minus quàm mm, erit quoque p^4 minus quàm $n^3 x$, hoc eſt, x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Hinc cum $xx + lx$ minus ſit quàm mm, erit $xx + lx$ minor quàm mm aliquâ quantitate. Vocetur quantitas hæc quamvis incognita zz, eritque $xx + lx + zz \infty mm$, vel $xx \infty -lx + mm - zz$, hoc eſt, $x \infty -\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm - zz}$, ideoque x minor erit quàm $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare in hoc caſu erit x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & minor quàm $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Atque ita in genere perſpicuum eſt, cùm $\frac{p^4}{n^3}$ æquatur ipſi $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, radicem æquationis propoſitæ æqualem eſſe ſingulis terminorum æqualium $\frac{p^4}{n^3}$ & $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; ſin minus, quamlibet radicum, ſive unam tantùm, ſive tres habuerit, neceſſariò eſſe inter hoſce terminos $\frac{p^4}{n^3}$ & $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$.

FINIS.

JOHANNIS DE WITT
ELEMENTA
CURVARUM
LINEARUM.

Edita

Operâ FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Academia Lugduno-Batava Matheſeos
Profeſſoris.



AMSTELODAMI,
Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.
Sumptibus Societatis.

Clariſſimo, Doctiſſimoque Viro,

D°. FRANCISCO à SCHOOTEN,

IOHANNES DE WITT

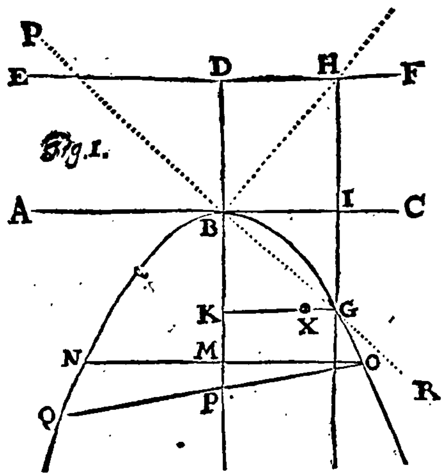
S. P. D.

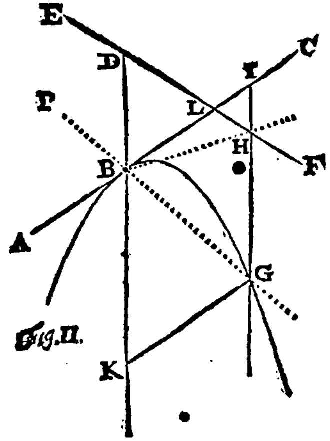
Linearum rectarum, angulorumque, quos comprehendunt, ut & figurarum rectilinearum, quæ inde naſcuntur, nec non Circulorum naturam veram atque intrinſecam, proprietateſque præcipuas, meo quidem judicio, ſatis perſpicuè tradiderunt Antiqui, ac quo pacto ex iiſdem traditis, imò ex paucis & principalioribus eorundem principiis, quælibet Problemata Plana, ac generaliter quæcunque in linearum rectarum, angulorum, figurarumque rectilinearum, nec non Circulorum contemplatione & cognitione deſiderari queunt, reſolvantur atque eruantur, univerſali quâdam viâ & Methodo Analyticâ, per Æquationum inventionem, harumque reſolutionem, pleniùs planiúſque à Recentioribus oſtenſum eſt; Adeò ut vel unico Circulo dato, utut exiguo aut ingenti, quæcunque Problemata Plana per ſolas lineas rectas unuſquiſque, in dictis Antiquorum Recentiorumque Geometrarum præceptis mediocriter verſatus, facillimè reſolvat; ac pro-

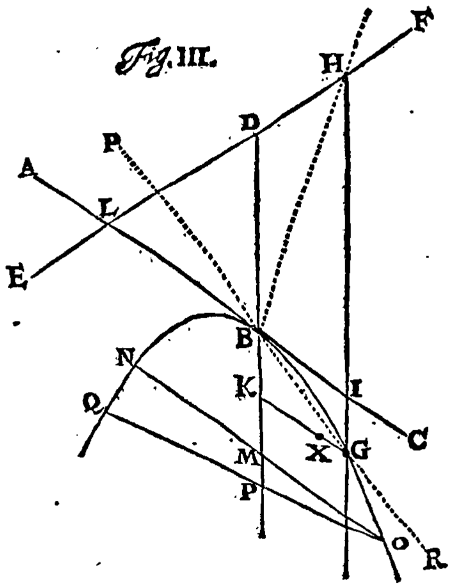
inde de iiſdem vel plura vel alio modo propoſita ac demonſtrata quædam deſiderare, & ſupervacuum & ineptum ſemper exiſtimavi. At verò cum cæterarum linearum curvarum Elementa, prout a Veteribus tradita atque a Recentioribus explicata ſunt, diligentiùs conſideraſſem, originem earum è ſolido peti atque inde ipſas in planum transferri naturali ordini, qui in Mathematicis quam maximè obſervandus eſt, omnino contrarium duxi; quemadmodum & demonſtrationes in iiſdem Elementis propoſitas, multis in locis eadem de cauſa & propter varias rationum compoſitiones, quibus ſæpe innituntur, ſubobſcuras, ac longa Propoſitionum ſerie Lectoribus tædio memoriæque oneri eſſe judicavi. Atque eâ quidem contemplatione excitatus jampridem, dum ſtudiis humanioribus Liberaliumque Artium doctrinæ incumbere mihi otium erat, animadverti, non eas ſolùm, quas vulgò Coni ſectiones *appellarunt, ſed & omnes omnino curvas lineas, cujuſcunque ſint generis, multipliciter quidem ex varia corporum diverſimodè compoſitorum aut figuratorum ſectione gigni, at verò earundem ſingulas infinitis quoque modis in plano generari, ipſarum autem naturam & proprietates ex ea generatione multò faciliùs quàm ex corporum ſectione deduci, ac firmiter mihi perſuaſum habeo, nullam aliam eſſe cauſam, quod*

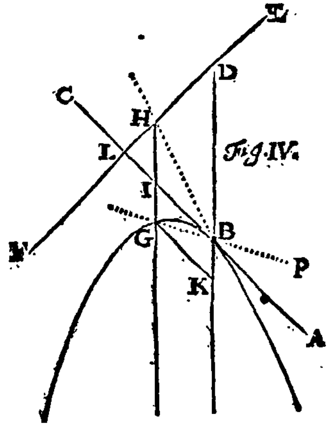
linea-

linearum curvarum, ſecundi generis ulteriorumque graduum ortus, natura, proprietas, atque eſſentia, cum exacta ſpecierum enumeratione, à nemine antehac explicata ac demonſtrata ſint, quam quòd tam in tractatione ortus & generationis, quam in demonſtratione eſſentiæ ac proprietatum linearum curvarum primi generis à naturali & ſimpliciſſima via deflexum ſit, utpote cum earundem contemplatio, prout in plano ſimpliciſſimè & quidem diverſimodè generantur, intellectum & imaginationem ad geneſin linearum curvarum ſecundi generis quaſi ſponte ducat. Cumque eorum, quæ antehac, dum per otium licuit, eò ſpectantia meditatus ſum, tu nunc amiciſſime Schooteni, *copiam tibi fieri deſideres, en, quantum in me eſt, deſiderio tuo ſatisfacio, quæque de eodem argumento à me quondam conſcripta ac pene in ordinem redacta inveni, jam tibi mitto, tuique omnino juris facio, cætera autem, quæ ſparſim tantùm annotata ſunt, ſi modò graviora id ferent negotia, recolligam, debitoque ordine conjungam; recollecta, atque ordinata ſuo quoque tempore tibi miſſurus, Vale. Hagæ Com.* VIII *Octobr. Anni* M. DC. LVIII.


Fig. I.
P
E
D
H
F
A
B
I
C
K
X
G
N
M
O
R
Q
P


Fig. II.
E
D
C
I
P
L
H
F
B
A
G
K


Fig. III.
F
H
D
P
A
L
E
B
N
K
I
Q
X
G
C
M
P
O
R


D
C
H
Fig. IV.
L
I
G
B
P
K
A

JOHANNIS DE WITT ELEMENTA CVRVARVM LINEARVM.

LIBER PRIMUS.

CAPUT I.

DEFINITIONES PRIMÆ.

I.

SI per rectam lineam immotam altera recta certo ſui puncto ſibi ſemper parallela moveatur aut incedat, eodemque illo motu anguli cujuſdam rectilinei, circa punctum fixum (quod idem ſit cum ejus vertice) circulariter mobilis, crus unum ſemper per prædictum mobile punctum tranſiens ſecum ducat, atque ita ſimul cruris alterius, & dictæ lineæ incedentis interſectione curva deſcribatur linea; recta, quæ, uti prædictum eſt, ſibi ſemper parallela movetur aut incedit, *Deſcribens* dicetur.

II.

Altera verò recta, immota manens, *Directrix* vocabitur.

III.

Prædictus autem angulus rectilineus, atque is qui ei eſt deinceps, *Angulorum mobilium* nomine venient.

IV.

IV.

At quos *deſcribens* ad *directricem* efficit, *Anguli ad Directricem* dicentur.

V.

Punctum fixum, circa quod *angulus mobilis* circulariter movetur, *Polus* nuncupabitur.

VI.

Ea autem *deſcribentis* pars, quæ inter *Polum* & *directricem* intercipitur, *Intervallum* nominabitur.

VII.

Crus *anguli mobilis*, quod *deſcribens* ſecum ducit, *Crus Patiens*.

VIII.

Alterum verò crus, quod à *deſcribente* ſecatur, *Crus Efficiens*, & per anguli verticem productum, *Linea Efficiens* appellabitur.

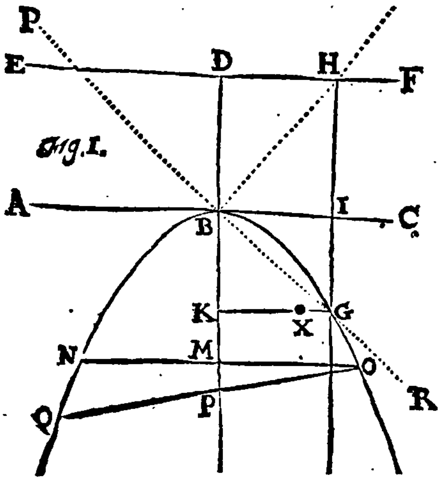
IX.

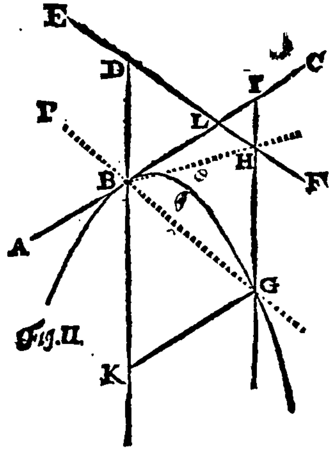
Cum *deſcribens* per *Polum* tranſit, ac proinde & cum *crure patiente* coïncidit, eſſe tam *deſcribentem* quàm *crus patiens*, ut & *lineam efficientem* totumque *angulum mobilem* in *ſtatione prima* conſtitutum dicemus; ac quoties de iis ſimpliciter ſermo erit in tali ipſas poſitione conſiderabimus,

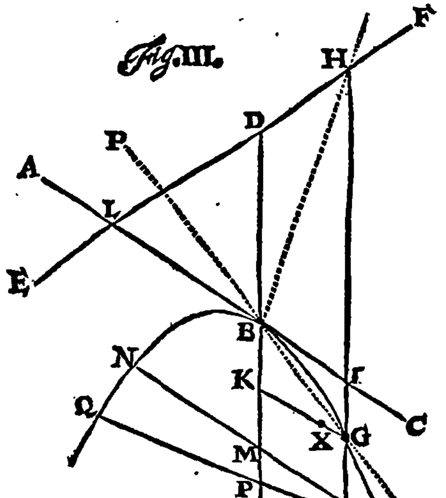
X.

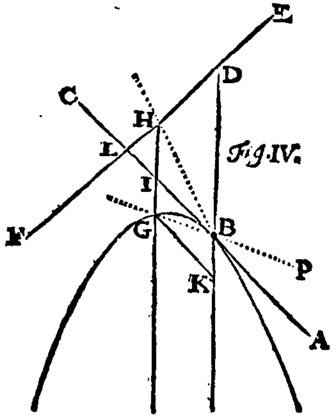
Quamlibet curvam, interſectione, uti prædictum eſt, in plano genitam, deſcriptam dicemus, *efficiente* atque *intervallo* conſideratis, ut exhibentur ac ſibi invicem junguntur *in ſtatione prima;* adeò ut *efficiens* cum *intervallo*, quod tam cum ipſa *deſcribente* quàm cum *crure patiente* in eadem ſtatione coïncidit, *angulum mobilem* utrinque conſtituat.

Vt in appoſitis figuris, ſi recta H G ſibi ſemper parallela certo ſui puncto, puta H, moveri concipiatur per immotam E F, eodemque illo motu ſecum ducere crus B H anguli H B G, circu-









lariter mobilis circa punctum B; ita ut idem crus BH ſemper tranſeat per prædictum ipſius HG punctum H, ſimulque alterius cruris BG ac dictæ lineæ HG interſectione G deſcribatur curva linea BG: erunt

HG *deſcribens.*

EF *directrix.*

HBG, HBP *anguli mobiles.*

FHG, EHG *anguli ad directricem.*

B *Polus.*

BD *intervallum.*

BH *crus patiens.*

BG *crus efficiens.*

PG *linea efficiens.*

DK *deſcribens in ſtatione prima*, ſive *deſcribens* ſimpliciter.

DBC, DBA *anguli mobiles in ſtatione prima.*

AC *efficiens in ſtatione prima*, ſive *efficiens* ſimpliciter.

Curvam BG, *efficiente* AC, *intervallo* verò BD deſcriptam dicemus; Et apparet, cùm *efficiens* PG eſt in ſtatione AC, *crus patiens* BH coïncidere cum *intervallo* BD; ac *deſcribentem* HG tunc eſſe in ſtatione DK, atque per *efficientem* & *intervallum* conſtitui utrinque *angulos mobiles* DBC, DBA.

THEOREMA I.

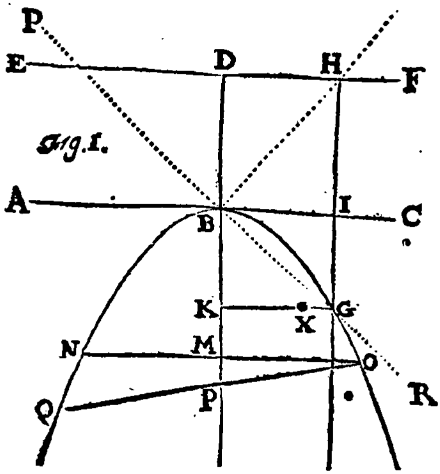
Propoſitio I.

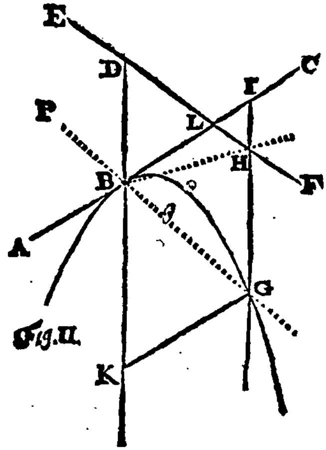
Quâlibet *efficiente*, & quocunque *intervallo*, ſi *anguli mobiles* æquales ſint iis, qui *ad directricem* ſunt ab eadem parte, curvâ deſcriptâ, hoc ipſi proprium erit, ut quævis recta à quolibet curvæ puncto ad *deſcribentem efficienti* æquidiſtans applicata poſſit rectangulum, ſub *intervallo* atque ea *deſcribentis* parte, quæ inter *Polum* & applicatam intercipitur, contentum.

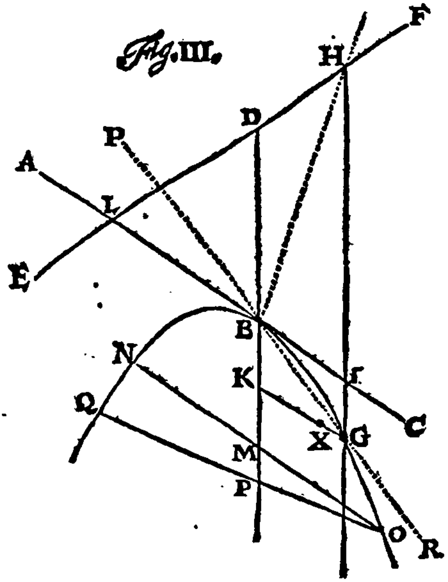
Sit *efficiente* ABC, *intervallo* BD, & *directrice* EF deſcripta curva BG; ita ut *angulus mobilis* DBA ſit æqualis angulo EDB *ad directricem*, ſitque à puncto G in curva utcunque aſſumpto ad *deſcribentem* DBK applicata recta GK *efficienti* AC parallela: dico quadratum applicatæ GK rectangulo DBK æquale eſſe.

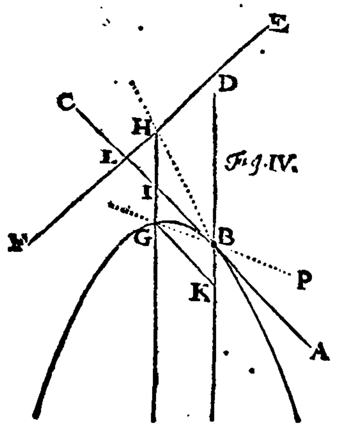
Con-

Conſtitutis enim tam *angulo mobili* quàm *deſcribente* in ſtatione uti fuêre, cùm per ipſarum interſectionem deſcriptum eſt punctum G, veluti in HBG & HIG: ſi tam *angulus mobilis* quàm is









 qui-

qui ad *directricem* eſt rectus ſit, uti in prima figura, erit [1] ut H I ad I B, ita I B ad I G, id eſt [2], ut D B ad G K, ita G K ad B K. ac proinde [3] quadratum rectæ G K rectangulo D B K æquale erit.

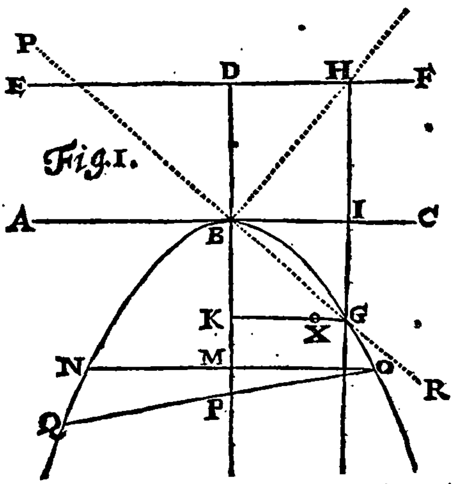
At verò ſi obliquus fuerit uterque angulorum A B D, E D B, uti in cæteris figuris, ſecabunt ſeſe *efficiens* & *directrix* productæ ad eas partes, ubi *angulus mobilis*, isque qui ad *directricem* eſt, acuti erunt. ſit itaque ipſarum interſectio in L puncto. Quoniam igitur tam anguli L B D, L D B, ex conſtructione, quàm L I H, L H I, propter parallelas D B, H I, æquales ſunt [4]; erunt quoque [5] tam lineæ L D, L B, quàm L H, L I; ac proinde & compoſitæ [a] vel reſiduæ [b] D H, B I æquales. Cum autem, angulis D B I, H B G iiſdem, ſive æqualibus exiſtentibus, addito [c], vel ablato [d] communi angulo H B I, angulus D B H angulo I B G, id eſt [6], B G K, fiat æqualis, atque angulus B D H ex conſtructione angulo D B I, id eſt [7], B K G, ſit æqualis: erunt [8] triangula B D H, G K B æquiangula, eritque proinde [9], ut B D ad D H ſive B I, hoc eſt [10], ad G K, ita eadem G K ad K B. quare, utſupra [11], quadratum applicatæ G K rectangulo D B K æquale erit. Quod eſt propoſitum.

[1] per Cor. 8 ſexti Eucl. [2] per 34 primi. [3] per 17 ſexti. [4] per 29 primi. [5] per 6 primi. [a] in caſu fig. II & ſimilibus. [b] in caſib. fig. III & IV, aut ſimilibus. [c] in caſu fig. II. & ſim. [d] in caſib. fig. III & IV, aut ſimilibus. [6] per 29 primi. [7] per 29 primi. [8] per 32 primi. [9] per 4 ſexti. [10] per 34 primi. [11] per 17 ſexti.

Conſtat itaque, curvam interſectione, uti prædictum eſt, deſcriptam, eam ipſam eſſe, quæ Veteribus Parabola; *Polumque* idem punctum quod vertex; *lineam* autem *deſcribentem in ſtatione prima* eandem quæ diameter, aut ſi *anguli mobiles* recti fuerint, quæ axis; *intervallum* verò idem quod latus rectum ſive recentioribus Parameter ad eandem diametrum eundemvè axem pertinens; atque *efficienti* parallelas, eas, quæ ordinatim ad diametrum vel axem applicatæ dicebantur; quare & eadem nomina retinento.

Corollarium I.

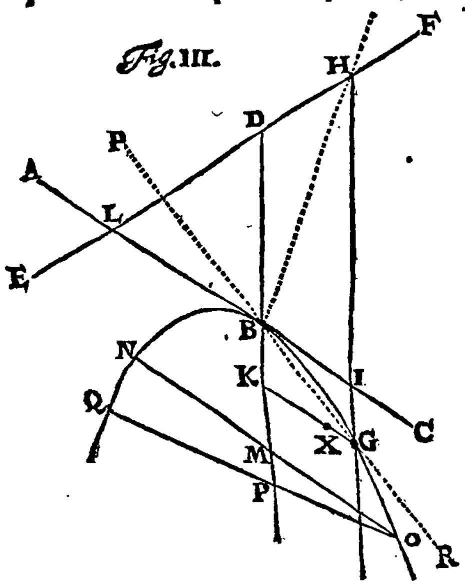
Cum *deſcribentis efficientisque* interſectio quibuſcunque ſtationibus in uno tantùm puncto fiat, manifeſtum eſt, *deſcribentem* in quacunque



cunque ſtatione, id eſt, rectas omnes diametro æquidiſtantes, in uno tantùm puncto Parabolæ occurrere.

Corollarium 2.

Cumque continuo *deſcribentis* à *Polo* receſſu major majorque ſemper fiat angulus, quem *crus efficiens* conſtituit ad *lineam efficientem in ſtatione prima*, veluti G B I, manifeſtum eſt, quamlibet rectam à *Polo* ad quodlibet curvæ punctum ductam, ut, ex. gr., B G, totam intra Parabolam, productam autem, uti ad R, extra Parabolam cadere.



Corollarium 3.

Conſtat præterea angulum G B K indefinitè quidem diminui, omnique propoſito angulo rectilineo minorem reddi poſſe; ſed *crus* tamen *efficiens* B G nunquam cum *deſcribente* B K coincidere, multò minùs ipſam tranſire: ad hoc enim neceſſum foret, ut *crus patiens* B H

[1] per 19 primi. BH *directrici* EF foret parallelum [1], aut certè ut caderet infra eam, quæ à *Polo directrici* æquidiſtàns ducta eſſet, quod planè impoſſibile eſt, cum *directricem* ſemper ſecet.

Corollarium 4.

Ideoque apparet, rectas omnes, quæ Parabolæ axem vel diametrum ſecant, productas tandem Parabolæ occurrere. Secet enim recta KX diametrum BKM, ac *crus efficiens* BG, in ea ſtatione conſtitutum, ut KBG angulus minor ſit dato angulo MKX [2], per Parabolam tranſeat in puncto G. Quoniam igitur recta KX cruri BG occurrit, aut eidem occurret inter B & G, quo caſu ipſa producta etiam curvæ BG occurſura eſt [3], aut eidem in ipſo G puncto occurret, quo caſu & ſimul Parabolæ ibidem occurret, aut denique ipſi BG occurret ad partes G productæ, quo utique caſu priùs Parabolæ occurret [4].

[2] juxta Cor. præcedens.
[3] per Corol. 2 hujus.
[4] per Cor. 2 hujus.

Corollarium 5.

Manifeſtum quoque eſt, applicatas omnes, utrinque Parabolâ terminatas, ab axe aut diametro biſariam dividi. Vt, ſi ducta ſit applicata NMO, quoniam [5] tam quadratum NM quàm quadratum MO æquale eſt rectangulo DBM: erunt quoque eadem quadrata inter ſe æqualia, ac proinde & rectæ NM, MO æquales.

[5] per 1 hujus.

Corollarium 6.

Patet quoque præcedentis converſum, nempe non poſſe alias rectas præter eas, quæ *efficienti* æquidiſtant, in Parabola ab axe ſive diametro biſariam ſecari. Si enim OQ, quæ non ſit æquidiſtans ipſi AC, ab axe ſive diametro BP biſariam divideretur in P, ductâ ON *efficienti* AC parallelâ, quæque proinde ab eodem axe ſive diametro biſariam quoque ſecabitur in M [6], foret OP ad PQ, ut OM ad MN: ideoque [7] ducta recta per N & Q eſſet diametro parallela, ac Parabolæ occurreret in duobus punctis N & Q. quod fieri non poteſt [8].

[6] per Corol. præcedens.
[7] per 2 ſexti.
[8] juxta Corol. 1 hujus.

Itaque non ſolùm applicatæ omnes à diametro biſariam dividuntur, ſed & quæ à diametro biſecantur ad ean-

eandem ordinatim applicatæ ſunt: & ſi diameter rectam quamlibet in Parabola ductam biſariam dividat omnes quoque ipſi æquidiſtantes biſariam ſecabit.

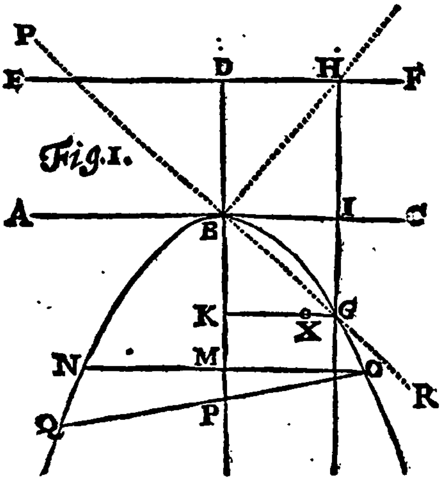


Fig. I.

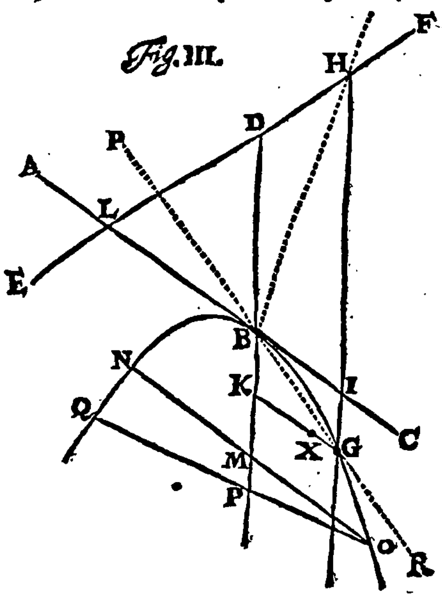


Fig. III.

Corollarium 7.

Ex demonſtratis quoque facilè colligitur, applicatarum quadrata ad ſe invicem eſſe, ſicut ad ſe invicem ſunt diametri portiones inter verticem & applicatas interceptæ. Vt, ſi applicatæ ſint G K, N M, erit [1] quadratum rectæ G K ad quadratum ipſius N M, ut rectangulum D B K ad rectangulum D B M, id eſt [2], ut B K ad B M.

[1] *per 1 hujus.*

[2] *per 1 ſexti.*

Corollarium 8.

Ex ipſa porrò deſcriptione manifeſtum eſt, *efficientem in ſtatione prima*, id eſt, rectam, quæ per *Polum* ſive verticem applicatis æquidiſtans ducitur, ibidem Parabolam nec in alio præterea puncto contingere, multò minùs eandem ſecare.

re. Sumpto enim in curva præter *Polum* B puncto utcunque, veluti G, ſi *crus efficiens* eidem applicetur, uti in poſitione B G, conſtituetur ab ipſo & *efficiente* angulus, ut G B C: atque adeò punctum G, utcunque ſumptum, id eſt, tota Parabola, præter *Polum* B, infra *efficientem* A B C cadet.

Corollarium 9.

Conſtat quoque ex antedictis, non poſſe aliam rectam præter *efficientem* Parabolam in *Polo* ſeu vertice contingere. Quoniam enim alia quævis recta per B ducta, ex. gr., P R, angulum conſtituit cum *efficiente* A C, ut R B C, ſi à *Polo* ad *directricem* ducatur recta B H, ita ut eidem angulo R B C æqualis ſit angulus D B H, ac per punctum H agatur recta diametro parallela, ut H G: erit ea ipſa *deſcribens*, & H B R *angulus mobilis*, utpote æqualis *angulo mobili* D B C; B R verò *crus efficiens*: ac proinde ipſarum H G, B R interſectio G in Parabola. Quare cum recta P R non in puncto B ſolummodo, ſed & in puncto G Parabolæ occurrat, ac tota B G recta [3] intra curvam cadat, non continget recta P R Parabolam, ſed eandem ſecabit.

[3] *per Corol.* 1 *hujus.*

Itaque omnes rectæ in Parabola ductæ, quæ contingenti in vertice æquidiſtant, ordinatim ad diametrum applicantur ſive ab eadem diametro bifariam dividuntur; & contra, quæ cuilibet rectæ, à diametro bifariam diviſæ, per verticem æquidiſtans ducitur, Parabolam in vertice contingit.

Corollarium 10.

Ex dictis quoque obvium eſt, quo pacto datâ poſitione Parabolæ diametro, ejusque vertice, & latere recto, nec non angulo, quem ordinatim applicatæ faciunt ad eandem diametrum, ipſa Parabola in plano deſcribatur. Si enim deſcribendæ Parabolæ diameter ſit B K, vertex B, latus rectum ad eandem diametrum pertinens B D, (quod quidem ipſi diametro in directum ſit poſitum,) atque angulus quem faciunt ad dictam diametrum ordinatim applicatæ A B K vel C B K: oportet, ductâ per D. lateris recti termi-

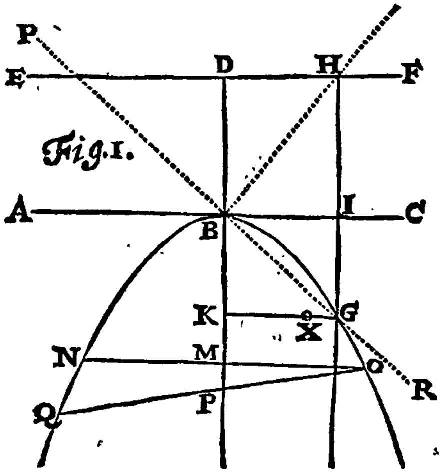


Fig. I.

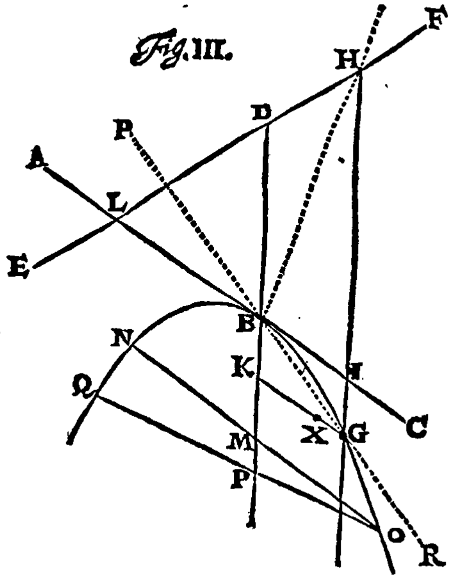


Fig. III.

terminum rectâ E D F in angulo E D B ipſi A B D æquali, *efficiente* A C, & *intervallo* B D, ad *directricem* E F curvam deſcribere, ut N B G: eritque hæc ipſa, quæ deſcribenda proponitur Parabola.

THEOREMA II.

Propoſitio 2.

Si per aſſumptum utcunque in Parabola punctum recta ducatur, axi diametrovè parallela, erit quoque aſſumptum punctum Parabolæ vertex, ductaque parallela itidem diameter.

Sit Parabola quælibet H A M, cujus axis diametervè A B, & latus rectum ad eandem pertinens A C; ſitque per punctum M, in curvâ utcunque aſſumptum, ducta recta M O, axi ſive diametro A B parallela: dico aſſumptum quoque punctum M verticem, dictamque M O diametrum eſſe; imò ſi ductâ, per M rectâ S V, ita ut ab axe ſive diametro A B extra Parabolam abſcindat portionem A I æqualem A B, quæ inter verticem A & applicatam M B intercipitur; productâque O M ad K, ita ut ſit M K ipſis A B vel A I & I M tertia proportionalis, *efficiente* S V, *intervallo* verò M K Parabola deſcribatur: dico hanc cum expoſita Parabola H A M eandem fore, ità ut altera alteri per omnia congruat, ac proinde non ſolùm M O diametrum, atque M verticem fore, ſed & M K latus rectum eſſe ad dictam diametrum M O pertinens; & S V Parabolam in vertice M contingere, omneſque ipſi parallelas in Parabola ductas ab M O bifariam dividi, atque ad hanc ipſam M O ordinatim applicari.

Sit enim in expoſita Parabola H A M aſſumptum præterea aliud quodpiam punctum, ex. gr., H; ſitque ab eodem ducta H G ad axem ſive diametrum A B ordinatim applicata, nec non H O ipſi S V æquidiſtans, quarum prior, ſi opùs fuerit producta, rectæ K O occurrat in E; poſterior verò, itidem producta, ubi opùs fuerit, prædictum axem ſive diametrum A B ſecet in D. Et apparet [1], ſi quadratum rectæ H O æquale ſit rectangulo K M O, Parabolam, quæ *efficiente* S V, *intervallo* verò M K deſcribetur, per punctum quoque H tranſituram. Eſſe autem quadratum rectæ H O æquale rectangulo K M O multifariam id quidem, &, meo ſaltem judicio, breviter ſimpliciterque ſatis in eum qui ſequitur modum demonſtratur.

Quoniam eſt [2] ut C A ad M B, ita M B ad B A, erit, duplicatis

[1] *ex* 1 *hujus.*

[2] *per* 1 *hujus, &* 17 *ſexti.*

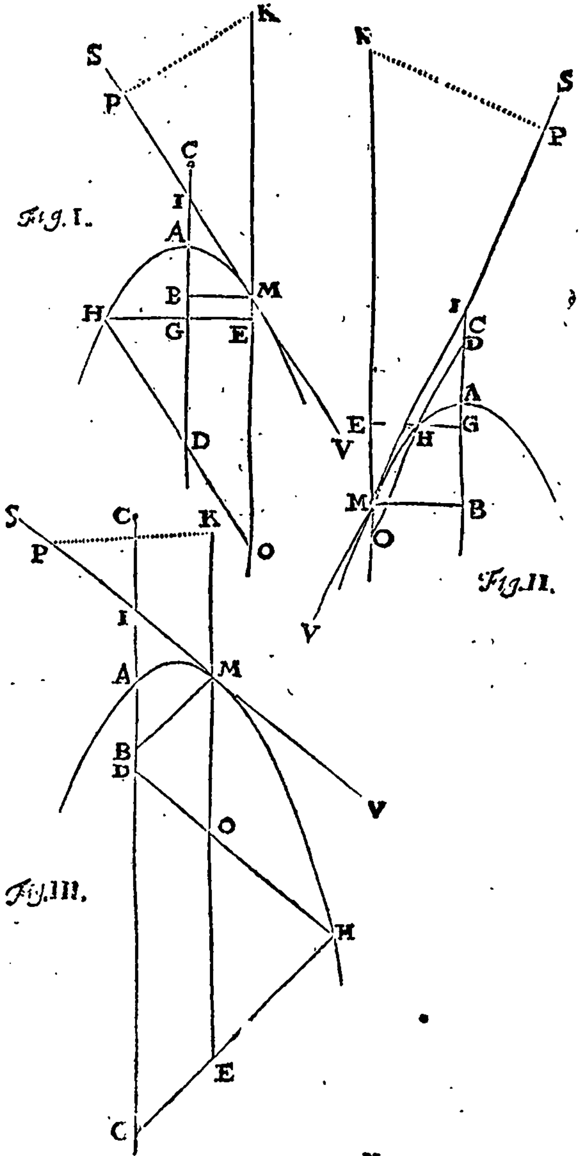


Fig. I.

Fig. II.

Fig. III.

catis conſequentibus, ut C A ad duplam M B ſeu ad G E bis, ita MB ad B I, hoc eſt [3], ita H G ad G D: ac proinde [4] contentum ſub mediis, nempe rectangulum H G E bis, æquale contento ſub extremis, nimirum rectangulo ſub C A & G D. Vnde cum bina quadrata rectarum H G & B M ſeu G E æqualia ſint [5] binis rectangulis C A G & C A B ſeu C A I, id eſt [6], rectangulo ſub C A & I G: erunt quoque, additis [a] demptiſve [b] utrinque æqualibus, nimirum rectangulo H G E bis ab una, ac rectangulo ſub C A & G D ab altera parte [7], compoſita [a] vel reſidua [b], nempe quadratum E H ac rectangulum ſub C A & I D ſeu M O æqualia [c].

[3] per 29 primi, & 4 ſexti. [4] per 16 ſexti. [5] per 1 hujus. [6] per 1 ſecundi. [a] in caſu fig. I & ſimilibus. [b] in caſu fig. II & III ac ſimilibus. [7] *quippe per ſupra demonſtrata rectangulum* H G E *bis æquale eſt rectangulo ſub* C A *&* G D. [c] in caſu enim fig. I, ſi ab una parte ad bina quadrata rectarum H G & G E addatur rectangulum H G E bis, compoſitum fit E H quadratum, per 4 ſecundi; ac ſi ab altera parte ad rectangulum ſub C A & I G addatur rectangulum ſub C A & G D, fit, per I ſecundi, rectangulum ſub C A & I D ſeu M O. Eodem modo, ſi in caſibus fig. II & III ab una parte à binis quadratis rectarum H G & G E auferatur rectangulum H G E bis, reſiduum erit, per 7 ſecundi, E H quadratum; ac ſi ab altera parte à rectangulo ſub C A & I G auferatur rectangulum ſub C A & G D reſiduum erit, per 1 ſecundi, rectangulum ſub C A & I D ſeu M O.

Ideoque cum ſit ut B M quadratum ad M I quadratum, ſive ut C A B rectangulum [8] ad rectangulum ſub K M & A B [9], hoc eſt [10], ut C A ad K M, ſeu, aſſumptâ communi altitudine M O, ut prædictum rectangulum ſub C A & M O ad K M O rectangulum, ita [11] E H quadratum ad H O quadratum; ſitque rectangulum ſub C A & M O, ut jam oſtenſum eſt, æquale quadrato E H: erit quoque [12] rectangulum K M O quadrato H O æquale.

Vnde cum punctum H, ubicunque id in expoſita Parabola A H aſſumptum fuerit, ſemper quoque ſit in Parabola, quæ *efficiente* S V, *intervallo* verò M K deſcribitur: ſequitur alteram alteri per omnia congruere, ideoque hanc cum illa eandem eſſe; ita ut conſtet veritas eorum, quæ proponebantur.

[8] per 1 hujus, & ex hypotheſi. [9] per 17 ſexti, & ex hypotheſi. [10] per 1 ſexti. [11] per 4 & 22 ſexti. [12] per 14 quinti.

Corollarium 1.

Ex antedictis manifeſtum eſt, quòd, ductis in Parabola binis quibuſlibet rectis ſibi invicem æquidiſtantibus, quæ utramque bifariam dividit recta linea illius diameter exiſtat. Quippe quæ per medium æquidiſtantium unius diameter ducetur, ſive hæc ſit ipſa diameter ex generatione, ſive eidem parallela, per medium quo-

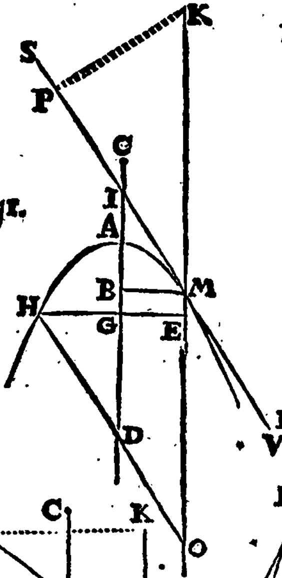


Fig. I.

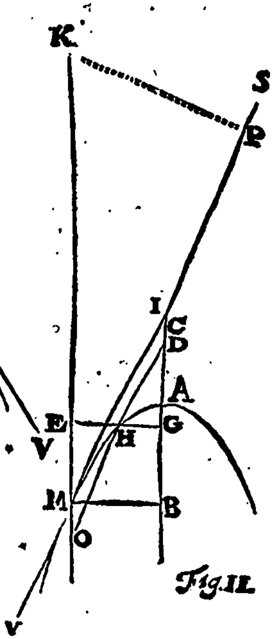


Fig. II.

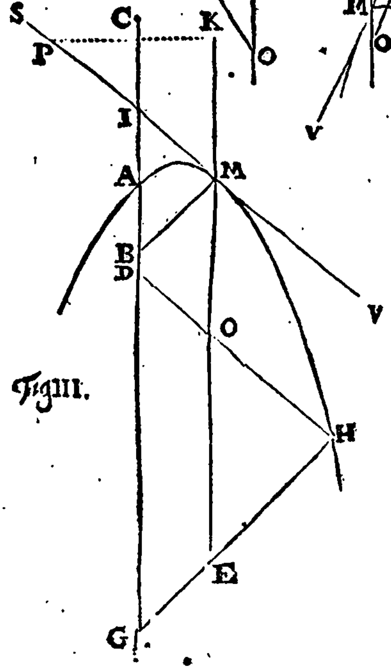


Fig. III.

[1] *per conclusionem 6 Cor. 1 hujus.*

quoque alterius æquidiſtantium tranſibit [1]. Atque ita apparet, quo pacto datæ cujuſlibet Parabolæ diametrum ſimulque ordinatim ad eandem applicatas invenire liceat.

Corollarium 2.

[2] *in 2 hujus.* [3] *per 9 Cor. 1 hujus.*

Patetque porrò, quaſlibet rectas Parabolam ubivis contingentes, atque ordinatim à puncto contactus ad diametrum applicatas, æquales utrinque à vertice diametri portiones abſcindere; & vice versâ à terminis applicatarum per diametrum ductas, ita ut æquales utrinque à vertice diametri portiones ductæ applicatæque abſcindant, Parabolam in dictis terminis contingere. Rectam enim S V, ex eo quòd æquales ſint A I, A B, Parabolam in puncto M utcunque aſſumpto contingere, nunc [2] demonſtratum; at nec aliam rectam in puncto M Parabolam contingere poſſe, ſuperiùs [3] oſtenſum eſt.

Corollarium 3.

[4] *per 1 Corol. 2 hujus.* [5] *per 8 & 9 Corol. 1 hujus.* [6] *per 2 hujus, ejuſque Cor. 2.*

Atque hinc non difficulter colligitur, quo pacto à quolibet puncto, non intra Parabolam dato, recta ducatur, quæ Parabolam contingat. Inventis enim [4] diametro quâcunque & rectis, quæ ad illam ordinatim applicantur, ſi in ejuſdem diametri termino ſit datum punctum, notum nunc eſt [5] rectam per idem punctum ductam, atque ordinatim applicatis æquidiſtantem, Parabolam ibidem contingere. At ſi alibi in curva ſit punctum datum, veluti M, ſitque inventa diameter A D: oportet, ductâ ex M rectâ M B ipſi A D applicatâ, ſumptâque A I ipſi A B æquali, ducere rectam per I & M. Sin autem extra curvam detur in diametro producta, veluti I: oportet, factâ A B ipſi A I æquali, atque B M ordinatim ad A D applicatâ, quæ Parabolæ occurrat in M, ducere rurſus rectam per I & M. At verò ſi neque in curva neque in diametro producta detur, ut, ſi inventa diameter ſit M O, datumque punctum I: oportet, ductâ I D diametro M O parallelâ, quæ Parabolam ſecet in A, ſumptâque A B ipſi A I æquali, atque ex B ductâ B M ordinatim ad A D applicatâ, nimirum, quæ æquidiſtans ſit contingenti in A, Parabolæque occurrat in M, ducere iterum rectam per I & M. quippe conſtat ex antedictis [6], ipſam I M omni caſu Parabolam contingere in puncto M.

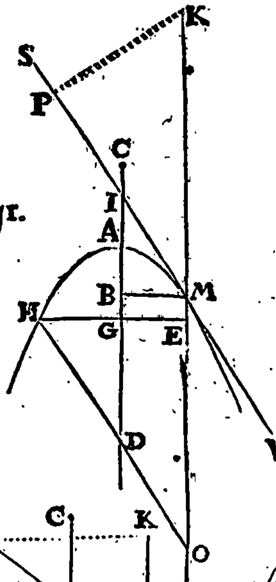


Fig I.

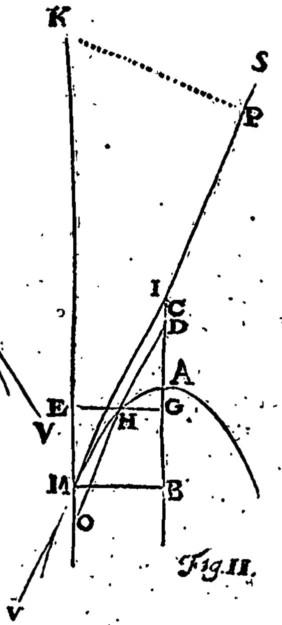


Fig. II.

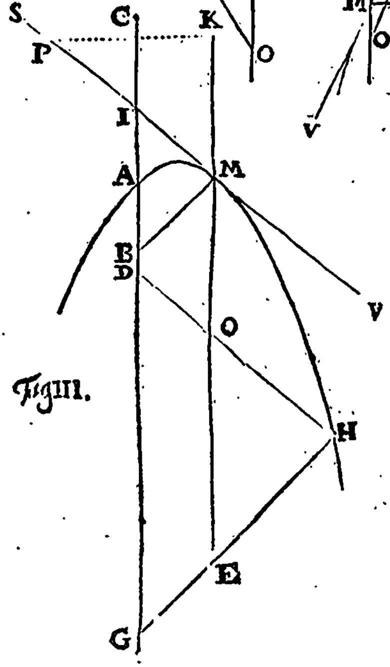


Fig III.

Corollarium 4.

Conſtat præterea, aſſumptæ cujuſlibet diametri parametrum eſſe tertiam proportionalem duabus rectis, quarum una eſt vel axis vel datæ diametri portio, intercepta inter ejuſdem verticem & eam, quæ Parabolam in aſſumptæ diametri termino contingit, altera verò ea prædictæ contingentis pars, quæ inter datam & aſſumptam diametrum interjacet. Demonſtratum enim eſt [1], rectam MK, ex eo quòd ipſis AI, IM tertia ſit proportionalis, aſſumptæ utcunque diametri MO parametrum eſſe.

[1] in 2 hujus.

Corollarium 5.

Ex demonſtratis quoque non difficulter colligitur, quo pacto, datâ poſitione quâlibet Parabolæ diametro, ejusque vertice, & latere recto, nec non angulo, quem faciunt ordinatim ad dictam diametrum applicatæ, alia ejuſdem Parabolæ diameter, quâcum applicatæ alium quemlibet angulum conſtituant, ac ipſius vertex, & latus rectum inveniantur. Si enim datâ poſitione diametro MO, vertice M, & latere recto MK, anguloque SMK vel VMK, quem applicatæ faciunt ad dictam diametrum MO, aliam ejuſdem Parabolæ diametrum invenire oporteat, quâcum applicatæ angulum conſtituant æqualem dato cuilibet angulo ABM: ducatur à termino K ad SV recta KP in angulo KPV ipſi dato ABM æquali, diviſâque PM bifariam in I ducatur per I recta IB ipſi MO æquidiſtans. Deinde ab M ad eandem IB applicetur recta MB in angulo MBI dato angulo æquali, diviſâque BI bifariam in A, erit quæſita diameter AB, vertex punctum A, ejusque parameter AC, recta nempe, quæ ipſis AB, BM tertia proportionalis exiſtit. Eſt enim [2] punctum M in Parabola, quæ *efficiente* ipſi BM parallelâ ac *intervallo* AC deſcribitur, quandoquidem quadratum applicatæ BM ex conſtructione [3] rectangulo CAB eſt æquale. Deinde quoniam ſimilia ſunt triangula BIM & PMK, ob æquales angulos ad B & P (ex conſtructione), atque ad I & M [4] (ob parallelas AD, MO) erit [5] ut BI ad IM, ita PM ad MK. &, ſumptis antecedentium dimidiis, ut AI ad IM, ita IM ad MK. Quare ſecundùm ea quæ ſuperiùs [6] demonſtrata ſunt, Parabolæ diametris AB, MO, ac parametris AC, MK,

[2] per 1 hujus.
[3] per 17 ſexti.
[4] per 29 primi.
[5] per 4 ſexti.
[6] in 2 hujus.

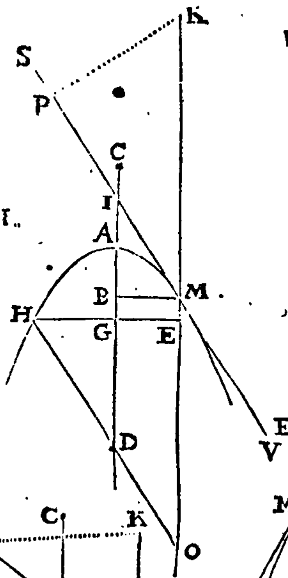


Fig. I.

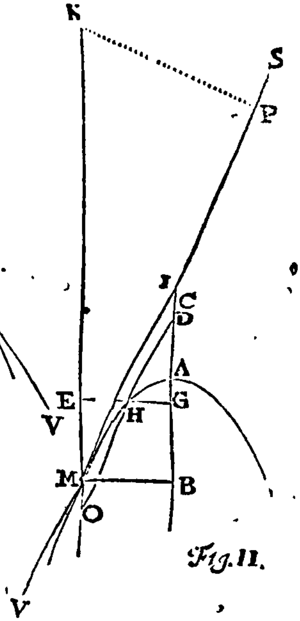


Fig. II.

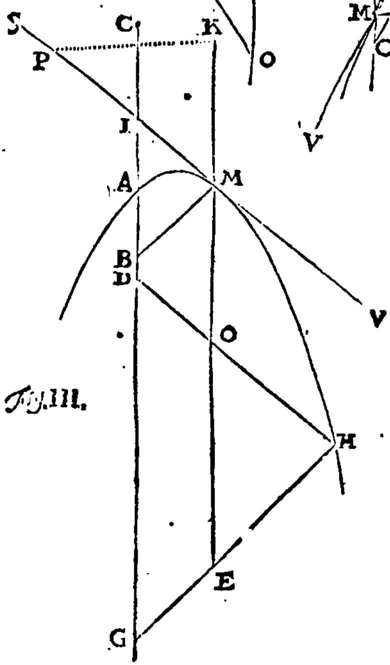


Fig. III.

MK, in dictis angulis deſcriptæ omnino eædem erunt. Sunt autem & anguli, quos faciunt MB aliæque ad diametrum AD applicatæ, ex conſtructione, dato angulo ABM æquales. Quocirca effectum eſt, quod quærebatur. Quòd ſi verò datus angulus ABM rectus fuerit, ipſe axis erit, inventa AD.

Etiamſi curva, quâlibet *efficiente*, & quocunque *intervallo* deſcripta, ſi *anguli mobiles* inæquales ſint iis, qui ad *directricem* ſunt ab eadem parte, ea ipſa ſit, cui poſt Circulum & Parabolam inter curvas primi generis primum locum tribuam, utpote quam ſequenti ſpecie quodammodo ſimpliciorem judicem; cujusque propterea ortum, naturam, & proprietates nunc expoſiturus eidem deſcribendi methodo inſiſtere, præmiſſiſque in principio definitionibus inhærere poſſem; cum tamen ea ipſius proprietas, quam primam ac maximè univerſalem exiſtimo, & è qua cæteras facillimè deduco, ex aliis generationum ſpeciebus diſtinctiùs appareat atque expeditiùs demonſtretur, quod in Mathematicis, & præcipuè in Elementorum explicatione non parvi faciendum puto, eam ſelegi, quæ à jam dicta quàm minimum deflectat, quæque ſimiliter anguli rectilinei rectæque lineæ motu & interſectione perficitur; at in qua dicti anguli motus non circularis ſed rectus, ac contra dictæ lineæ non rectus ſed circularis eſt, ut ex definitionibus in eum finem adaptatis, & ſequenti Capite propoſitis, magis eluceſcet.

CAPUT II.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

I.

SI recta linea circa punctum fixum circulariter mota angulum quendam rectilineum, altero ſui crure immo-

immotæ rectæ lineæ applicatum, per eandem immotam lineam promoveat, & ſecum ducat, ita ut prædicta recta circulariter mota ſemper per idem applicati cruris punctum tranſeat, ſimulque alterius cruris ac ejuſdem lineæ motæ interſectione curva deſcribatur, appellabitur hæc ipſa circulariter mota *linea deſcribens.*

II.

Altera verò immota manens *Directricis* nomen retinebit.

III.

Prædictus autem angulus rectilineus, isque qui ei eſt deinceps, ſimiliter & hîc *Angulorum mobilium* nomine venient.

IV.

Sicuti & punctum fixum, circa quod *deſcribens* circulariter movetur, *Polus* nuncupabitur.

V.

Rurſusque crus *anguli mobilis*, quòd à *deſcribente* per *directricem* promovetur, *Crus patiens.*

VI.

Alterum autem crus, quod à deſcribente ſecatur, *Crus efficiens*, & per anguli verticem productum *Linea efficiens* appellabitur.

VII.

Cùm *deſcribens efficienti* parallela eſt ac proinde nulla ipſarum interſectio exiſtit, tam *efficientem* quàm *deſcribentem* in *ſtatione prima* conſtitutas dicemus; ac quoties de iis ſimpliciter ſermo erit, in tali ipſas ſtatione conſiderabimus.

VIII.

Intervallum autem hic nominabimus tam eam *Cruris patientis* partem, quæ inter *anguli mobilis* verticem & *deſcribentem* interjacet, quàm eam *deſcribentis* portionem, quæ inter *Polum* & *directricem* intercipitur.

Vt in appoſita figura, ſi recta A B C [a] circa A punctum circulariter moveri concipiatur, motuque ſuo promovere & ſecum ducere angulum B E C [a]; ita ut crus E B ſemper applicatum maneat immotæ rectæ lineæ K L, ac prædicta A B C mobilis ſemper tranſeat per idem punctum cruris E B, ex. gr., per B, ſimulque alterius cruris E C & dictæ lineæ A B C interſectione C deſcribatur curva linea *c* C, ſitque ducta A D cruri E C parallela: apparet, quò magis recta A B C ad ipſam A D accedit, eò minorem fieri angulum E C B. ac tandem cùm ipſa A B C pervenit ad A D, ita ut cum ipſa coincidat, eundem angulum E C B tunc penitus evaneſcere: cum A D, ac proinde & dicta A B C, ſtatione illâ, cruri E C parallela ſit; ita ut tunc dictum crus E C ſive recta C E M eadem ſit cum linea G F H, nimirum ſuppoſitâ D F ipſi B E, æquali, eruntque

[a] quæ quidem recta A B C, ut & angulus B E C in figura quatuor diſtinctis ſtationibus exhibentur.

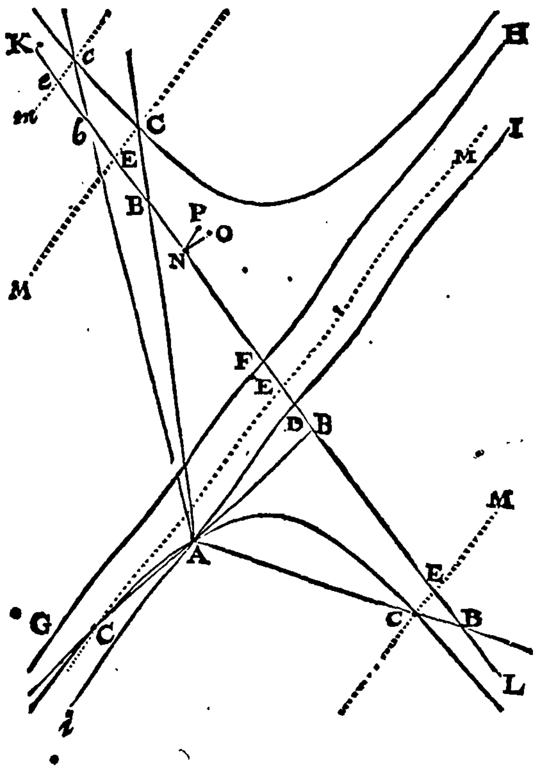
A B C *deſcribens* in ſtationibus diverſis.
K L *directrix*.
B E C, B E M, ſive D F H & D F G *anguli mobiles*.
A *Polus*.
E B *crus patiens*.
E C *crus efficiens*.
M C *linea efficiens*.
G F H *efficiens in ſtatione prima*, ſeu *efficiens* ſimpliciter.
A D I *deſcribens in ſtatione prima*, ſeu *deſcribens* ſimpliciter.
E B ſeu F D & A D utrumque *intervallum*.

THEOREMA III.

Propoſitio 3.

Quibuſlibet *angulis mobilibus* ac quibuſcunque *intervallis*, juxta definitiones præmiſſas deſcriptâ curvâ, hoc ipſi proprium erit, ut rectangulum contentum

tum ſub qualibet recta *efficienti* parallelâ, à quocunque curvæ puncto ad *directricem* ductâ, atque eâ *directricis* parte, quæ inter dictam parallelam & *efficientem* intercipitur, æquale ſit ei, quod ſub utroque *intervallo* continetur, rectangulo.



Sit quolibet *angulo mobili* B E C, & quibuſcunque *intervallis* E B, ſeu F D & A D, *directrice* K D L, deſcripta curva *c* C; ita ut *efficiens* ſit G F H, ſitque à puncto C in curva utcunque aſſumpto ad *directricem* ducta C E *efficienti* G F H, ac proinde & *intervallo* A D parallela: dico rectangulum F E C æquale eſſe A D F rectangulo, ſive ei, quod ſub A D, E B continetur.

 Con-

Conſtitutis enim tam *angulo mobili* quàm *deſcribente* in ſtatione uti fuêre, cùm per ipſarum interſectionem deſcriptum eſt punctum C, veluti in B E C, & A B C, quoniam æquales ſunt rectæ E B, F D, additâ vel ablatâ utrinque F B vel E D: erunt quoque rectæ B D, F E æquales; cumque [1] propter parallelas E C, A D æquiangula ſint triangula B D A, B E C: erit [2] ut B D, id eſt, F E, ad D A, ita B E ad E C: ideoque [3] rectangulum F E C ſub extremis æquale rectangulo ſub mediis A D, E B ſeu A D F. Quod erat propoſitum.

[1] per 29 primi. [2] per 4 ſexti. [3] per 16 ſexti.

Quare cum & omnia rectangula, ut F E C, inter ſe quoque ſint æqualia, manifeſtum eſt, curvam, interſectione, uti prædictum eſt, deſcriptam, eam ipſam eſſe, quam Veteres Hyperbolam vocarunt, aut, ſi binas curvas eodem & continuato motu genitas ſimul conſideres, eſſe eas, quas Oppoſitas Sectiones dixêre: *directricem* verò K L ac *efficientem* G H eas ipſas, quas Aſymptotos nuncupaverunt, atque ipſarum occurſum ſive interſectionem, ut F, idem illud punctum, quod Hyperbolæ ſive Oppoſitarum Sectionum Centrum ab ipſis appellatum fuit. ideoque & hæc ſingula iiſdem illis nominibus in poſterum indigitabimus, ſolummodo ſectionum nomen, ob rationes ſuperiùs [4] expoſitas, minùs congruum evitaturi. Rectangulum autem ſub *intervallis* contentum, ſeu, quadratum ei æquale, Hyperbolæ Potentiam dicemus.

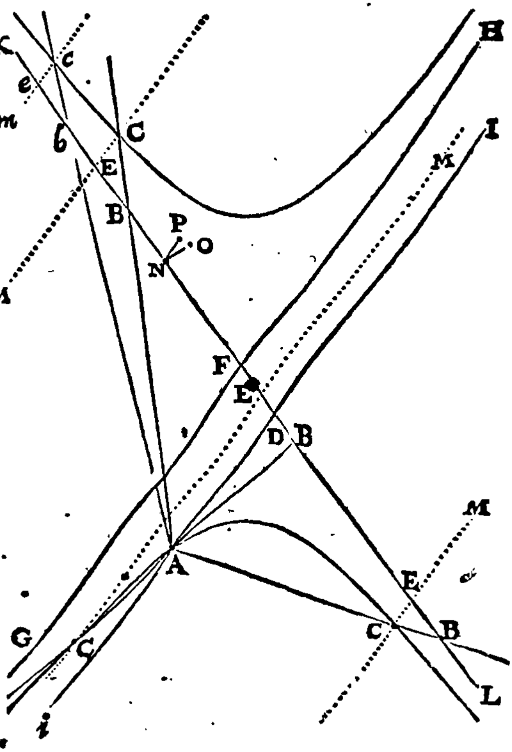
[4] in Epiſtola ad Schotenium.

Corollarium 1.

Ex ipſa deſcriptione manifeſtum eſt, Aſymptotos & Hyperbolam magis magiſque ad ſe invicem continuè accedere, tandemque pervenire ad diſtantiam, datâ quâlibet diſtantiâ minorem; cujus tamen, ſi demonſtrationem exactiorem deſideres, data diſtantia ſit recta N O, ad Aſymptoton F K perpendicularis. Sumptâ igitur N P, quæ eâdem N O minor ſit, ſi fiat ut N P ad A D, ita D F ad F *e*, ac per *e* ducatur *e c* ipſi N P æqualis atque Aſymptoto F H æquidiſtans: erit [5] rectangulum F *e c* Potentiæ A D F æqua-

[5] per 16 ſexti.

æquale, ideoque juxta ea, quæ [6] demonſtrata ſunt, punctum C in Hyperbola. Eſt autem & *ce* ipſi P N æqualis, hoc eſt, datâ di- 6 *in* 3 *hujus.*



ſtantiâ N O minor. Quare & perpendicularis à puncto *c* ad Aſymptoton F K ducta, id eſt, diſtantia Hyperbolæ à prædicta Aſymptoto, ibidem datâ diſtantiâ N O multò minor erit.

Corollarium 2.

Atque ita ſimul apparet, rectas omnes, quæ ductæ ex quolibet puncto intra angulum, qui ad verticem eſt ei, qui Hyperbolam continet, per centrum tranſeunt, vel Aſymptotorum alterutram ſecant, Hyperbolæ tandem occurrere, productasque eandem, &

in

in uno tantùm puncto, ſecare: quandoquidem hæ productæ ab utraque Aſymptoto magis magisque ſemper abſcedunt.

Corollarium 3.

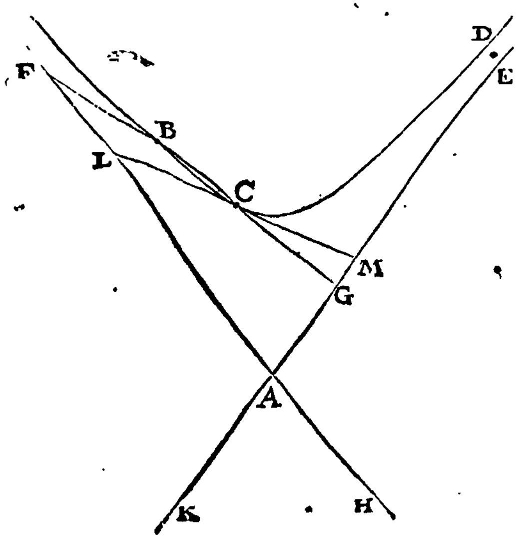
Conſtat præterea, *efficientem* in quacunque ſtatione, id eſt, rectas omnes Aſymptoto parallelas ſimiliter Hyperbolæ, & quidem in uno tantùm puncto, occurrere, productaſque illam ibidem ſecare. Impoſſibile enim eſt, ut *deſcribens* atque *efficiens* ullâ ſtatione ſeſe in pluribus punctis interſecent.

THEOREMA IV.

Propoſitio 4.

Recta linea, ſive per bina quælibet in Hyperbola puncta tranſiens, ſive eidem in occurrens, ut producta utrinque extra Hyperbolam cadat, utrique Aſymptoto, intra angulum, qui curvam continet, occurrit.

Sint in Hyperbola B C D, cujus Aſymptoti K A E, H A F,



ductæ F B C G, tranſiens per bina curvæ puncta B & C, atque M C eidem occurrens in C, ita ut producta versùs L utrinque extra Hyperbolam cadat; Dico tam rectam F B C G quàm rectam M C L utrique Aſymptoto K A E & H A F intra angulum E A F occurrere. Hoc enim ſi non accideret, eadem F B C G vel M C L aut Aſym-

Aſymptotorum alterutri parallela eſſet, aut, ſi vel huic vel illi Aſymptoto extra angulum E A F occurreret, ex puncto intra angulum K A H ad verticem ei qui Hyperbolam continet ducta hanc vel illam Aſymptoton ſecaret; ideoque [1] curvæ in uno tantùm puncto non verò in duobus occurreret, ac producta eandem ſecaret, non autem utrinque extra Hyperbolam caderet, contra id quod ponitur. Ac proinde conſtat propoſitum.

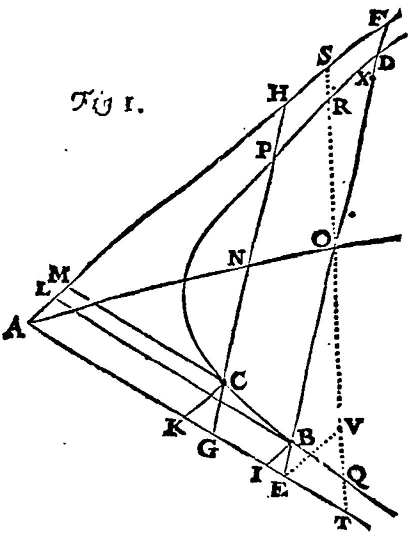
[1] per 2 & 3 Cor. 3 hujus.

Theorema V.

Propoſitio 5.

Aſſumptis, vel in una eademque, vel in oppoſitis Hyperbolis, duobus utcunque punctis, ductiſque per eadem ſive unâ rectâ ſive duabus, ſibi mutuò parallelis: erunt rectangula ſub ductæ vel ductarum partibus, Hyperbolâ & Aſymptoto utrinque interceptis, ſibi invicem æqualia.

Fig. 1.



Sint, vel in eadem, vel in oppoſitis Hyperbolis B P C D, cujus Aſymptoti A E, A F, aſſumpta utcunque bina puncta B & C, ac per eadem ductæ binæ rectæ B D, C P ſibi invicem parallelæ Aſymptotiſque occurrentes in punctis E, F, G, H [a]: dico rectangulum E B F rectangulo G C H æquale eſſe.

[a] qui utique occurſus in caſu primæ figuræ ſit intra angulum E A F, per 4 hujus.

Ductis enim per eadem puncta B & C rectis, utrique Aſymptoto parallelis alteraque Aſymptoto terminatis, B I, B L, C K, C M: erit [1], propter rectangula I B L & K C M [2] æqualia, ut I B ad K C, hoc eſt [3], ut E B ad

[1] per 16 ſexti.
[2] per 3 hujus.
[3] per 29 primi, & 4 ſexti.

[4 per 16 ſexti.] ad G C, ita C M ad B L, id eſt, ita C H ad B F. ac proindè [4] rectangula E B F & G C H æqualia ſunt. Quod demonſtrandum erat.

Eodem modo oſtendetur, ſi per bina puncta, ut B & D, una recta ducatur B D, quæ utrique Aſymptoto occurrat in punctis E & F [a], rectangula E B F, F D E ſibi invicem æqualia eſſe.

Corollarium 1.

In oppoſitis Hyperbolis, ſi parallelarum altera per centrum tranſeat, ut C P in tertia figura, eâdem demonſtratione comprobatum erit, rectangula ſub partibus quarumlibet rectarum, quæ per Aſymptotos ad utramque curvam ducuntur, ſingula æqualia eſſe quadrato æquidiſtantis à centro ad Hyperbolam ductæ. Quare cum ex dictis appareat, ſi, ductâ per centrum rectâ utcunque veluti C G P in eadem figura, eidem ubivis alia recta æquidiſtans ducatur B D, quæ ſecet Aſymptotos in E & F, rectangulum E B F vel F D E quadrato G C itemque & G P quadrato æquale eſſe: ſequitur, ipſas quoque G C, G P eſſe ſibi invicem æquales: hoc eſt, quamlibet rectam ad oppoſitas Hyperbolas per centrum ductam, in eodem centro bifariam ſecari.

Corollarium 2.

Conſtat quoque cujuſlibet rectæ, ſive per unam eandemque, ſive per oppoſitas Hyperbolas ductæ, partes Hyperbolâ & Aſymptotis interceptas ſibi invicem eſſe æquales.

Ductâ enim utcunque B D, quæ Aſymptotis occurrat in E & F, cum ex antedictis [5] B F ſit ad D F, ut D E ad B E: erit quoque dividendo [6], vel, in oppoſitis Hyperbolis, componendo [7], B D ad D F, ut eadem B D ad B E, ideoque D F, B E [8], ac proinde & B F, D E ſibi invicem æquales erunt.

[5 per 5 hujus, & 16 ſexti. 6 per 17 quinti. 7 per 18 quinti. 8 per 9 quinti.]

Corollarium 3.

Unde pariter conſtat, rectam, quæ vel unius ejuſdemque, vel oppoſitarum Hyperbolarum, bina puncta conjungit, nullo alio

ſui

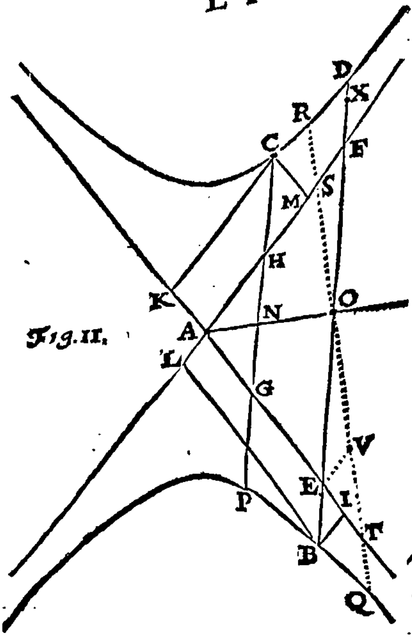


Fig. II.

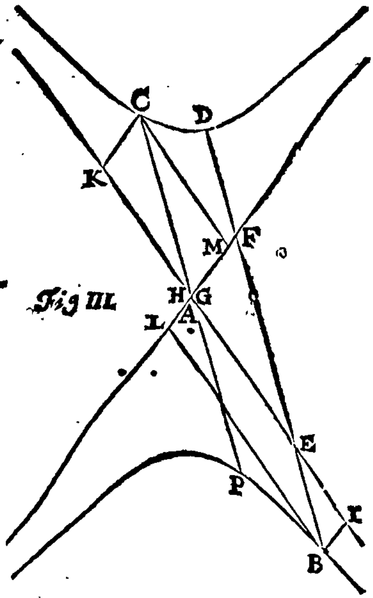


Fig. III.

ſui puncto in Hyperbola eſſe. Si enim præter D & B aliud quoddam ipſius D B punctum, ex.gr. X, in Hyperbola foret, eſſet [1] X F ipſi B E ac proinde & ipſi D F æqualis, pars toti, quod eſt abſurdum.

[1] per Coroll. præced.

Corollarium 4.

Facilè autem apparet, & converſum quoque propoſitionis verum eſſe: nempe, ſi, iiſdem poſitis, & rectangulis E B F, G C H æqualibus, punctorum B & C unum in Hyperbola ſit, & alterum quoque fore in eadem vel oppoſita Hyperbola, cujus Aſymptoti ſunt A E & A F. Ex eo enim quòd æqualia ſint rectangula E B F & G C H, demonſtrabitur æqualia quoque eſſe rectangula A I B & A K C eâdem methodo, quâ converſum ſupra oſtenſum fuit. ideoque ſi punctum B ſit in Hyperbola, erit quoque [2] punctum C in eadem aut in oppoſita Hyperbola, cujus Aſymptoti ſunt A E, A F, & vice verſâ. De binis autem punctis in eadem linea, ut B & D, idem dictum eſto; imò & idem erit in eadem linea, ſi dicta

[2] per 3 hujus.

puncta, ut B & D, æqualiter ab Aſymptotis diſtent: quandoquidem, ſi B E, D F æquales ſunt, additâ utrinque B D, vel in oppoſitis Hyperbolis ipsâ E F, & B F, ipſi D E, ideoque & rectangulum E B F rectangulo F D E æquale erit.

Corollarium. 5.

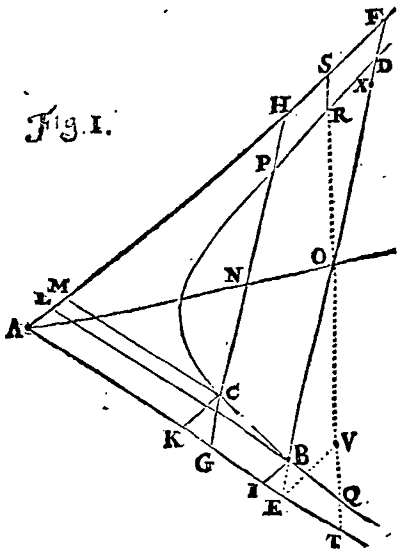
Apparet quoque, eam, quæ ex centro quamlibet rectam, vel in una eademque, vel in oppoſitis Hyperbolis ductam, bifariam dividit, omnes quoque ipſi æquidiſtantes bifariam dividere. Ut, ſi ex centro A ducta A N O dividat bifariam rectam C P, cui æquidiſtans ſit B D; cum, æqualibus N P, N C additis demptiſvè æqualibus [1] P H, C G, æquales quoque ſint N H, N G, ideoque & O E, O F [2]: erunt ſimiliter, demptis rurſum additiſvè æqualibus [3] B E, D F, ipſæ O B & O D quoque æquales.

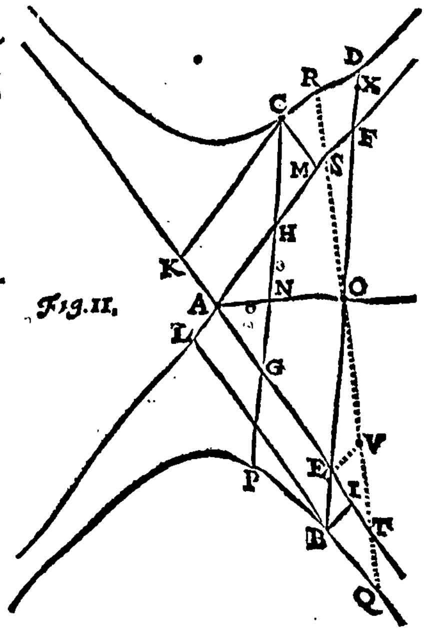
Ejuſmodi autem rectæ à centro per Hyperbolam ductæ [a], interceptæ diametri; ſeu diametri ſimpliciter; at quæ à cento inter oppoſitas Hyperbolas ducuntur [b], ſecundæ diametri; parallelæ verò per eaſdem bifariam ſectæ [c], ordinatim ad diametros applicatæ vocantur; & ſi applicatæ ad angulos rectos à diametris ſecentur, eædem diametri Hyperbolæ axes appellantur. Quando autem ſecunda diameter ordinatim ad interceptam diametrum applicatis parallela eſt, altera alteri *Conjugata* dicitur.

Corollarium 6.

Ex præmiſſis colligitur, non poſſe alias rectas, quàm dictas parallelas ſeu ordinatim applicatas, à diametro bifariam ſecari. Si enim fieri poſſit, ſecetur à diametro A O bifariam præter applicatas alia recta, ut Q R, Aſymptotis occurrens in S & T; & ſit per O ordinatim applicata B O D, Aſymptotis occurrens in E & F. Æquales ergo erunt tam E O, F O [4], quàm T O, S O [5]. Quoniam verò, ductâ E V ipſi S F parallelâ [6], æqui-

[1] *per 2 Cor. 5 hujus.*
[2] *per 9 quinti, & 4 ſexti.*
[3] *per 2 Cor. 5. hujus.*
[a] ut A O ſimileſque in I figura.
[b] ut A O ſimileſque in II figura.
[c] ut P C, D B in utraque figura.
[4] *per 2, & 5 Cor. 5 hujus.*
[5] *ex hypoth. juncto Cor. 5. hujus.*
[6] *per 15 & 29 Primi.*





æquiangula ſunt triangula E O V & F O S: erit [1] ut E O ad OV, ita F O ad O S. Quare cum E O ipſi F O ſit æqualis, erit & [2] O V ipſi O S, hoc eſt, rectæ O T æqualis, pars toti, quod eſt abſurdum. Non ergo bifariam ſecatur recta R Q à diametro A O.

[1] per 4 ſexti.
[2] per 14 quinti.

Corollarium 7.

Atque hinc manifeſtum fit, quòd, ſi vel in una eademque vel ad oppoſitas Hyperbolas binæ quælibet rectæ ſibi invicem æquidiſtantes ductæ ſint, quæ utramque bifariam dividit recta linea per centrum tranſeat ſeu diameter ſit: Quippe quæ per medium unius æquidiſtantium diameter ducetur, per medium quoque alterius æquidiſtantium tranſibit [3]. Unde apparet, quo pacto datæ Hyperbolæ vel oppoſitarum Hyperbolarum diametros quotlibet, ſimulque ordinatim applicatas ad eaſdem, nec non & centrum, utpote quod binarum pluriumvè diametrorum communis interſectio eſt, reperire liceat.

[3] per 5 Corol. 5 hujus.

THEOREMA VI.

Propoſitio 6.

Recta per quodlibet Hyperbolæ punctum ad utramque Aſymptoton ducta, quæ in eodem puncto bifariam dividitur, curvam ibidem contingit; & contra, contingens ad utramque Aſymptoton producta in puncto contactus bifariam diviſa eſt.

Sit per punctum C in Hyperbola B C D, cujus Aſymptoti A E, A F, ducta recta G C H, utrinque Aſymptotis terminata, quæ in eodem puncto C bifariam dividatur. Dico rectam G H curvam contingere in C. Secet enim, ſi fieri poteſt, recta G H Hyperbolam in C & I: eritque [1] I H rectæ C G, ideoque & ipſi C H æqualis. quod eſt abſurdum. Non ſecat ergo G H Hyperbolam, ſed eandem contingit. Dico porrò converſim, ſi G H in puncto C Hyperbolam contingat, eandem quoque in C bifariam dividi. Hoc enim ſi non ſit, ſumatur in C H majori parte ipſa H I æqualis G C. Hinc cum punctum C ſit in Hyperbola, erit quoque [2] punctum I in Hyperbola, totaque C I [3] intra curvam cadet, ideoque ipſa G H Hyperbolam non continget, ſed eandem in punctis C & I ſecabit, contra id quod ponebatur. Non ergo G C ipſi C H inæqualis eſt. Ideoque caſu utroque conſtat propoſitum.

[1] per 2 Cor. 5 hujus.
[2] per 4 Cor. 5 hujus.
[3] per 3 Cor. 5 hujus.

Corollarium 1.

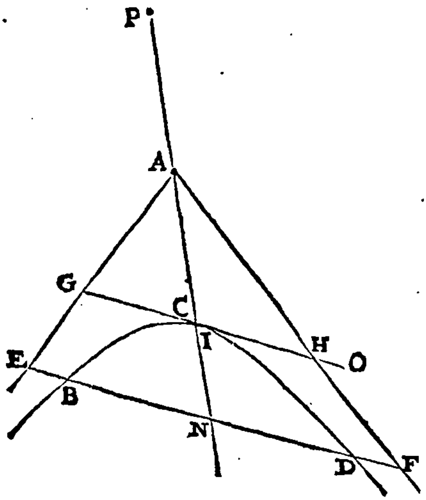
Manifeſtum itaque eſt ex antedictis, ſingula rectangula, quæ comprehenduntur ſub partibus cujuſlibet rectæ contingenti parallelæ, inter Hyperbolam & Aſymptotos interceptis, eſſe æqualia dimidiæ tangentis quadrato. Ut, ſi tangenti G C H æquidiſtans utcunque ducta ſit B D, Aſymptotis occurrens in E & F: erit rectangulum E B F ſive [4] B F D, ut & F D E ſive D E B æquale rectangulo G C H [5], id eſt, ipſius C H vel C G, dimidiæ tangentis quadrato.

[4] per 2 Cor. 5 hujus.
[5] per 5 hujus.

Co-

Corollarium 2.

Patet porrò, rectam, quæ per diametri terminum ducitur æquidiſtans ei, quæ in Hyperbola ab eadem diametro bifariam ſecatur, id eſt, ordinatim applicatis parallela, Hyperbolam in dicto termino contingere. Ut, ſi ad diametrum A N ordinatim applicata ſit B N D, quæ producta Aſymptotis occurrat in E & F, ac per diametri terminum C ducta ſit recta G C H, ipſi B N D æquidiſtans, cum æquales ſint N F & N E [1]: erunt [2] quoque C H & C G æquales, ideoque [3] G C H Hyperbolam continget in C.



- *1 per 2 & 5 Corol. 5 hujus.*
- *2 per 9 quinti, & 4 ſexti.*
- *3 per 6 hujus.*

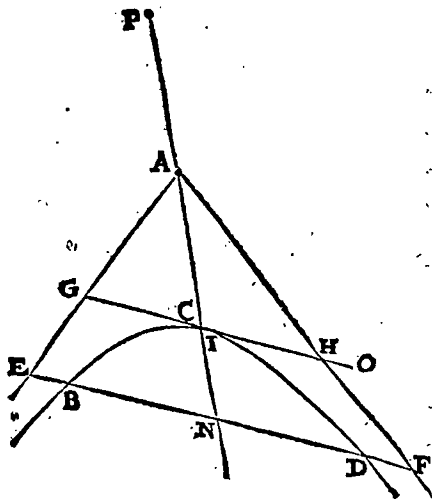
Corollarium 3.

Hinc liquet, non ſolùm omnes rectas in Hyperbola, contingenti parallelas, à diametro per tactum ductâ bifariam ſecari, ideoque ad eam ordinatim applicatas eſſe, ſed & non poſſe plures rectas in uno eodemque puncto Hyperbolam contingere. Ut, ſi contingenti G H parallela ſit B D, Aſymptotis occurrens in E & F, ductâ per tactum C diametro A C N, quæ ductæ B D occurrat in N: quoniam [4] G C, C H æquales ſunt, nec non E N, N F [5], erunt quoque (demptis æqualibus [6] E B, D F,) B N, N D æquales, ideoque & ad dictam diametrum A C N ordinatim applicatæ. At verò non poſſe aliam rectam præter G H Hyperbolam in puncto C contingere, patet, quandoquidem & omnes ipſi æquidiſtantes in Hyperbola ductæ, quæque aliæ eſſent quàm prædictæ applicatæ, bifariam quoque per eandem diametrum dividerentur [7]. quod fieri non poſſe ſuperiùs [8] oſtenſum eſt.

- *4 per 6 hujus.*
- *5 per 9 quinti & 4 ſexti.*
- *6 per 2 Cor. 5 hujus.*
- *7 per ſupra demonſtrata.*
- *8 in Cor. 6. 5 hujus.*

Cæ-

Cæterùm monendum hîc, ut diametrorum quoque magnitudo determinetur, eam[1], quæ à quocunque in Hyperbola puncto per centrum ducta oppoſitâ Hyperbolâ terminatur, ideoque interceptæ inter centrum & curvam dupla eſt[1], ut C A P, vel Hyperbolæ, vel oppoſitarum Hyperbolarum tranſverſam diametrum; eamque, quæ in ipſius termino curvam contingens utrinque Aſymptotis terminatur, aut quæ ipſi per centrum æqualis & parallela ducitur, ut G C H, ſecundam diametrum tranſverſæ conjugatam; at verò illam, quæ ipſis P C, G H, tranſverſæ nempe ſecundæque diametro tertia eſt proportionalis, ut C O, rectum latus ſive Parametrum dici.



[1] *per Corol. 15 hujus.*

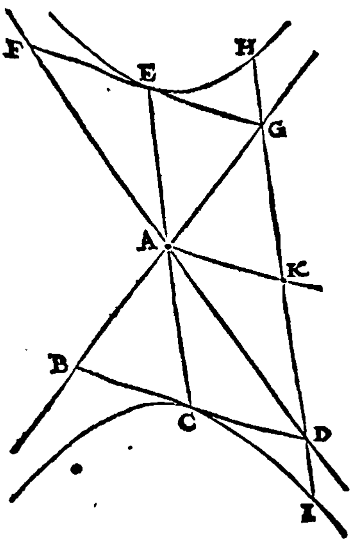
THEOREMA VII.

Propoſitio 7.

Quæ per terminum tranſverſæ cujuſlibet diametri recta ducitur, contingenti in vertice parallela, oppoſitam Hyperbolam contingit, & quæ ad ſecundam diametrum, aſſumptæ cuicunque diametro conjugatam, ordinatim applicatur, eidem aſſumptæ diametro æquidiſtat.

Sit

Sit Hyperbolæ, vel oppoſitarum Hyperbolarum I C, H E, quarum Aſymptoti B G, D F, diameter tranſverſa utcunque aſſumpta C E, perque ejus terminum E ducta recta F E G parallela ipſi B D, quæ curvam in vertice C contingit, ita ut hæc atque illa Aſymptotis occurrant in punctis B, D & F, G: dico prædictam quoque F E G oppoſitam Hyperbolam contingere in E; & ſi per centrum A ducatur ſecunda diameter A K, diametro C E conjugata, ordinatim ad eandem A K applicatas ipſi C E diametro æquidiſtare.



Quoniam enim eſt [1] tam A E ad E G, ut A C ad C B, quàm A E ad E F, ut A C ad C D; & ſunt tam A E, A C [2] quàm C B, C D [3] æquales, erit quoque [4] tam E G ipſi C B, quàm E F ipſi C D, ac proinde & E G ipſi E F æqualis. Unde [5] recta F G oppoſitam Hyperbolam H E continget in puncto E. Quod primo loco propoſitum fuit. Porrò ſi per G & D ducatur recta G D, ſecans ſecundam diametrum A K in K, oppoſitiſque Hyperbolis occurrens in H & I, cum æquales & parallelæ ſint E G, C D, erunt & [6] quæ ipſas conjungunt G D, C E parallelæ & æquales. Ideoque cum ſecunda diameter A K contingentibus B D, F G, id eſt [7] ordinatim ad diametrum C E applicatis æquidiſtans ſit, utpote ex Hypotheſi ipſi C E conjugata: erunt quoque [8] rectæ G K, E A, ut & K D, A C, ideoque & [9] G K, K D æquales. Quibus ſi addantur æquales [10] G H, D I: erunt ſimiliter rectæ K H, K I ſibi invicem æquales. Quocirca cum [11] ad ſecundam diametrum A K applicata ſit recta H I, etiam cæteræ omnes ad eandem applicatæ [12] eidem H I ac proinde & diametro C E æquidiſtabunt. Quod ſecundo loco propoſitum erat.

[1] *per 29 primi, & 4 ſexti.*
[2] *per 1 Corol. 5 hujus.*
[3] *per 6 hujus.*
[4] *per 14 quinti.*
[5] *per 6 hujus.*
[6] *per 33 primi.*
[7] *per 3 Cor. 6 hujus.*
[8] *per 34 primi.*
[9] *per 1 Cor. 5 hujus.*
[10] *per 2 Cor. 5 hujus.*
[11] *per 6 Cor. 5 hujus.*
[12] *per 5 & 6 Cor. 5 hujus.*

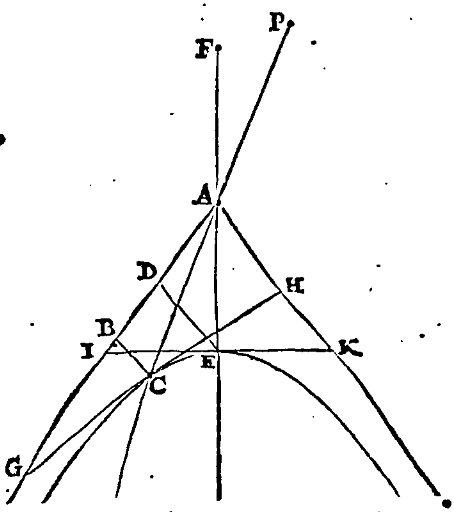
PROBLEMA I.

Propoſitio 8.

Datis quibuſcunque diametris conjugatis, Hyperbolæ axes conjugatos invenire.

Sint datæ diametri conjugatæ P C, G H, oporteatque invenire conjugatos axes ejus Hyperbolæ, cujus eædem P C, G H conjugatæ diametri exiſtunt.

Ductis ab A centro per G & H Aſymptotis A G, A H, ductâque à[1] C ad eorum alterutram rectâ C B alteri æquidiſtante, ſumatur inter A B, B C media proportionalis A D. Dein ductâ D E ipſi A D æquali, atque Aſymptoto A H parallelâ, erit E A F, tranſiens per E & A ac ipſius E A dupla, tranſverſus axis qui quæritur, atque I E K ad eandem perpendicularis, ac utrinque Aſymptotis terminata, axis ſecundus, priori conjugatus.



Quoniam enim punctum C [1] in Hyperbola eſt, rectangulumque A D E ipſi A B C æquale[2]; erit quoque punctum E [3] in Hyperbola. Porrò cum propter rectas D A, D E æquales [4] æqualis quoque ſit D A E angulus ipſi D E A, id eſt[5], E A K angulo, ſintque & anguli A E I, A E K ex conſtructione æquales: erunt[6] triangula A E I, A E K æquiangula, atque ob latus A E commune[7] etiam æqualia, latusque I E lateri E K æquale. Unde cum punctum E [8] in Hyperbola exiſtat, dividatque bifariam rectam I K, utrinque Aſymptotis terminatam, continget ipſa I K[9] curvam in E: ideoque, & propter angulos F E I, F E K rectos, conjugati axes erunt F E, I K.

[1] *ex hypotheſi.*
[2] *per 17 ſexti.*
[3] *per 3 hujus.*
[4] *per 5 primi.*
[5] *per 29 primi.*
[6] *per 32 primi.*
[7] *per 26 primi.*
[8] *per ſup. demonſtr.*
[9] *per 6 hujus.*

THEO-

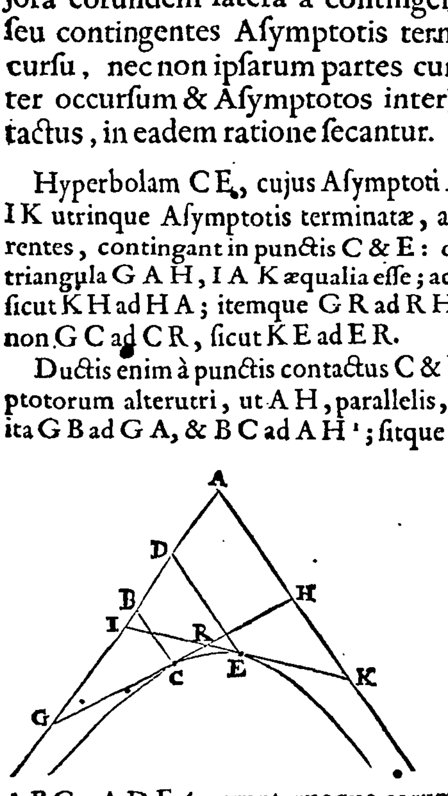
THEOREMA VIII.

Propoſitio 9.

Quælibet contingentes ab angulo Hyperbolæ Aſymptotis comprehenſo æqualia abſcindunt triangula, & rectangula ſub eorundem triangulorum lateribus comprehenſa invicem quoque æqualia ſunt, ac præterea majora eorundem latera à contingentibus, ipſæque baſes ſeu contingentes Aſymptotis terminatæ, in mutuo occurſu, nec non ipſarum partes curvam contingentes inter occurſum & Aſymptotos interjectæ, in punctis contactus, in eadem ratione ſecantur.

Hyperbolam C E, cujus Aſymptoti A G, A K, rectæ G H, I K utrinque Aſymptotis terminatæ, ac ſibi mutuò in R occurrentes, contingant in punctis C & E: dico tam rectangula quàm triangula G A H, I A K æqualia eſſe; ac præterea eſſe G I ad I A, ſicut K H ad H A; itemque G R ad R H, ſicut K R ad R I; nec non G C ad C R, ſicut K E ad E R.

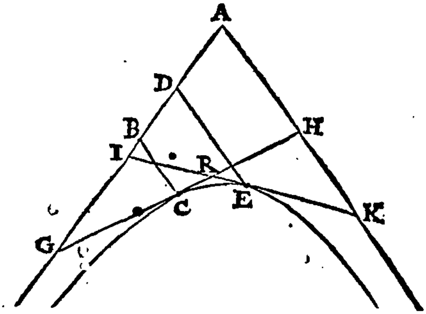
Ductis enim à punctis contactus C & E rectis C B, E D Aſymptotorum alterutri, ut A H, parallelis, cum ſit ut G C ad G H, ita G B ad G A, & B C ad A H [1]; ſitque G H ipſius G C dupla [2]. erit quoque tam G A ipſius G B quàm A H ipſius B C dupla, ideoque [3] rectangulum G A H rectanguli G B C ſive A B C quadruplum. Eodem modo rectangulum I A K rectanguli A D E quadruplum oſtendetur. Hinc cum æqualia ſint rectangula A B C, A D E [4], erunt quoque eorum quadrupla, nimirum rectangula G A H & I A K æqualia. Quod eſt primum.



Unde cum [5] ſit ut G A ad A K, ita I A ad A H, triangula quoque

[1] per 4 ſexti.
[2] per 6 hujus.
[3] per 20 ſexti.
[4] per 3 hujus.
[5] per 16 ſexti.

6 per 15 ſexti. que G A H, I A K æqualia erunt[6], utpote habentia latera circa communem angulum, reciproca. Quod eſt ſecundum.



7 per 16 quinti. 8 per 17 quinti. Ac cum permutando[7] quoque ſit G A ad I A, ut A K ad A H: erit &[8] dividendo G I ad I A, ut K H ad H A. Quod eſt tertium.

9 per 15 ſexti. Porrò cum ab æqualibus triangulis G A H, I A K ablato communi quadrilatero I R H A, reſidua, nempe triangula G R I & K R H, quoque æqualia remaneant, erunt[9] eorundem latera circa æqualem angulum ad R reciproca, id eſt, erit G R ad R H, ut K R ad R I. Quod eſt quartum.

10 per 18 quinti. 11 per Coroll. 19 quinti. Unde cum componendo[10] quoque ſit G H ad R H, ut K I ad R I, aut, ſumptis antecedentium dimidiis, C H ad H R, ut E I ad I R: erit & per converſionem rationis[11] C H ſive G C ad C R, ut E I ſive K E ad E R. Quod eſt quintum. Atque ita demonſtrata ſunt ea, quæ proponebantur.

THEOREMA IX.

Propoſitio 10.

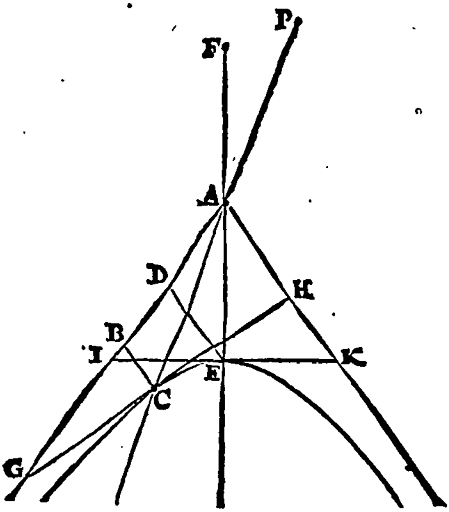
Ductâ quacunque in Hyperbola diametro, erit ut quadratum ſecundæ ad quadratum tranverſæ diametri, ſive ut parameter ad tranſverſam diametrum, ita quadratum cujuſlibet ordinatim applicatæ ad rectangulum ſub ejuſdem diametri partibus, utroque tranſverſæ termino & applicatâ interceptis, comprehenſum.

Sit in Hyperbola B C D, cujus Aſymptoti A E, A F, ducta diameter utcunque P A C N, cujus ſecunda diameter tranſverſæ P C conjugata ſit G C H, parameter verò C I, ipſis nempe P C, G H tertia proportionalis, & ſit ordinatim ad dictam diametrum appli-

applicata quælibet D N: dico eſſe ut G H quadratum ad C P quadratum, aut, quod idem eſt[1], ut recta I C ad rectam C P, ita quadratum D N ac P N C rectangulum.

Productâ enim applicatâ D N utrinque per Hyperbolam ad Aſymptotos, ut E B N D F, cum ſit[2] F N quadratum ad H C quadratum, id eſt[3], ad B F D rectangulum, ut N A quadratum ad C A quadratum: erit dividendo[4] D N quadratum ad H C quadratum, ut P N C rectangulum,[5] ad C A quadratum, & permutando[6] D N quadratum ad P N C rectangulum, ut H C quadratum ad C A quadratum, ſive[7] ut G H quadratum ad C P quadratum, aut, quod idem eſt, ut I C ad C P. Quod demonſtrandum erat.

1 per Corol. 20 ſexti.
2 per 4, & 22 ſexti.
3 per 1 Corol. 6 hujus.
4 per 6 ſecundi, & 17 quinti.
5 per 6 ſecundi.
6 per 16 quinti.
7 per 15 quinti.



Corollarium 1.

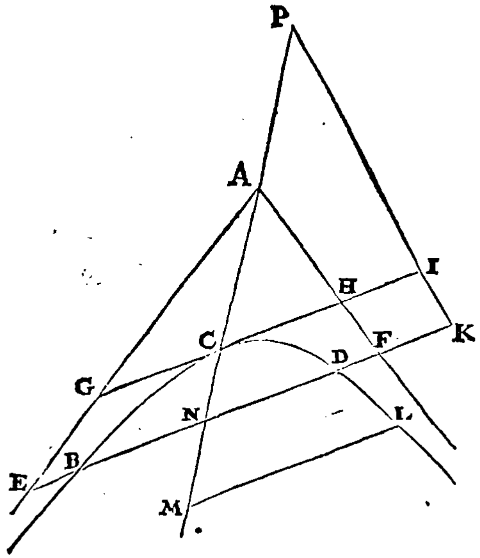
Hinc colligitur, quo pacto datæ cujuſlibet Hyperbolæ, ut B C D, Aſymptoti inveniantur. Quippe inventis[8] centro A, diametro quâcunque A N quæ curvam ſecet in C, & ordinatim ad eandem applicatâ B N; ſi, productâ N A ad P, ut A P ipſi A C ſit æqualis, ductâque per C rectâ G C I applicatæ B N parallelâ, in eadem notentur puncta H & G, ita ut ſit P N C rectangulum ad B N quadratum, ſicut A C quadratum ad quadratum abs C G ſeu C H: erunt, quæ ex A centro per G & H ducuntur rectæ A G E & A H F, Aſymptoti quæſitæ[9].

8 per 7 Coroll. 5 hujus.
9 per converſum 10 hujus.

Corollarium. 2.

Ex demonſtratis patet, ſi per P & I tranſverſæ diametri parametrique terminos ducatur recta P I K, occurrens cuilibet appli-

catæ,ut N D, productæ,ſi opùs fuerit, in K: rectangulum C N K quadrato applicatæ D N æquale eſſe. Quoniam enim eſt [1] ut P C ad C I, ſive ut P N ad N K[2], id eſt, (ſumptâ N C communi altitudine) ut P N C rectangulum ad C N K rectangulum [3], ita idem P N C rectangulum ad D N quadratum, erit [4] rectangulum C N K quadrato applicatæ D N æquale, id eſt, ſi veterum Geometrarum more id proponi placeat:



1 per 10 hujus conv.

2 per 4 ſexti.

3 per 1 ſexti.

4 per 9 quinti.

Quæ ab Hyperbola ad diametrum ordinatim applicatur, poteſt ſpatium adjacens lateri recto, latitudinem habens lineam, quæ à diametro abſcinditur inter ipſam applicatam & diametri verticem interjectam, excedensque figurâ ſimili ſimiliterque poſitâ ei, quæ lateribus tranſverſo rectoque continetur.

Corollarium 3.

Manifeſtum quoque eſt ex demonſtratis, in Hyperbola applicatarum quadrata ad ſe invicem eſſe, veluti rectangula ſub interceptis diametri portionibus, ab utroque tranſverſæ termino ſumptis, ut, ſi applicatæ ſint L M, D N, erit ut quadratum L M ad rectangulum P M C, ita quadratum D N ad rectangulum P N C; cum utriuſque eadem ſit ratio, quæ eſt parametri ad tranſverſam diametrum [5], eritque propterea [6] permutatim L M quadratum ad D N quadratum, ut P M C rectangulum ad P N C rectangulum.

5 per 10 hujus.

6 per 16 quinti.

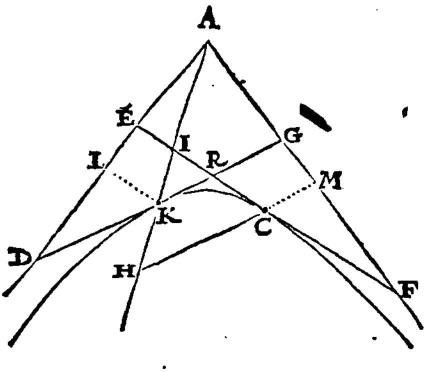
THEO-

THEOREMA X.

Propoſitio 11.

Si quælibet contingens cuicunque Hyperbolæ diametro occurrat, atque à puncto contactus recta ad eandem diametrum ordinatim applicetur, erit rectangulum ſub diametri portionibus à centro per contingentem applicatamque abſciſſis æquale ſemidiametri tranſverſæ quadrato.

Quamcunque Hyperbolam K C, cujus Aſymptoti A D, A F, contingat in puncto C utcunque ſumpto recta E C F, Aſymptotis occurrens in E & F, diametro autem A H utcunque ductæ in I; & per punctum contactus C ad eandem diametrum ordinatim applicata ſit C H, quæ producta Aſymptoto occurrat in M. Dico rectangulum H A I æquale fore quadrato ſemidiametri K A, ſive, quod idem eſt [1], continuè proportionales eſſe H A, K A, & I A.



Ductis enim D K G applicatæ C H, & K L contingenti F E parallelis, notatoque interſectionis puncto R, cum ſit [2] R C ad C F, ut R K ad K D, hoc eſt [3], M G ad M F, ut [2] L E ad L D: erit quoque [4] M G ad G F, ut L E ad E D. Quare cum porrò [5] ſit F G ad G A, ut D E ad E A: erit [6] ex æquo M G ad G A, id eſt [7], H K ad K A, ut L E ad E A, hoc eſt [8], ut [3] K I ad I A: & [9] componendo H A ad K A, ut K A ad I A. Quod demonſtrandum erat.

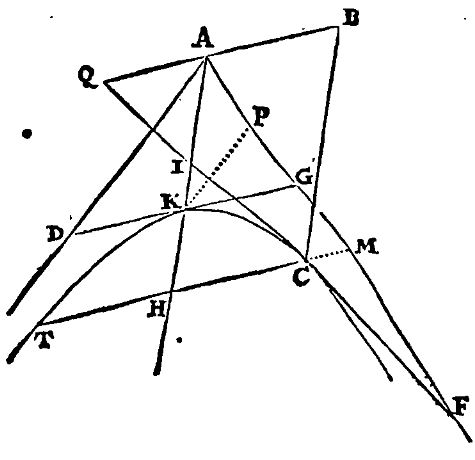
[1] *per* 17. *ſexti.* [2] *per* 2 *Cor. ſexti, & 9 hujus.* [3] *per* 2 *ſexti.* [4] *per compoſitionem rationis contrariam, vide Clavium ad* 18 *quinti.* [5] *per* 9 *hujus.* [6] *per* 22 *quinti.* [7] *per* 2 *ſexti.* [8] *per* 2 *ſexti.* [9] *per* 18 *quinti.*

THEOREMA XI.

Propoſitio 12.

Si quælibet contingens cuicunque ſecundæ Hyperboles diametro occurrat, atque à puncto contactus recta ad eandem diametrum ordinatim applicetur, erit rectangulum ſub ſecundæ diametri portionibus, à centro per contingentem applicatamque abſciſſis, æquale ſemi-ſecundæ diametri quadrato.

Quamcunque Hyperbolam K C, cujus Aſymptoti A D, A F, contingat in puncto C, utcunque ſumpto, recta F C Q, occurrens ſecundæ diametro A B, utcunque ductæ in Q: dico, ſi ex C ad eandem diametrum A B ordinatim applicetur recta C B, & ex A eidem æquidiſtans ducatur A K H, ſecans contingentem F C Q in I, Hyperbolæque occurrens in K, atque per K recta agatur D K G ipſi A B parallela, (ita ut [1] A K H diameter ſit ſecundæ diametro A B conjugata, ac ſemi-ſecundæ diametri magnitudine ſint K G, K D,) fore rectangulum B A Q æquale ipſius K G vel K D ſemi-ſecundæ diametri quadrato.



[1] *per 7 hujus.*

Ductâ enim per C rectâ T C M ſecundæ diametro A B parallelâ, ideoque ad interceptam diametrum A K H ordinatim applicatâ, quæ Hyperbolæ occurrat in T diametroque A H in H, Aſymptoto verò A F in M: Quoniam eſt [2] H A quadratum ad K A quadratum, ſive [3] H M quadratum ad K G quadratum ſeu

[2] *per 11 hujus, & Cor. 20 ſexti.*
[3] *per 4 & 22 ſexti.*

ſeu[1] ad T M C rectangulum, ut H A ſeu C B ad I A, id eſt[2], ut B Q ad A Q; erit dividendo[3] H C quadratum ſeu B A quadratum ad K G quadratum, ut B A ad A Q. Ac propterea[4] B A, K G, & A Q proportionales erunt, rectangulumque B A Q[5] quadrato K G æquale. Quod demonſtrandum erat.

Corollarium ad duas propoſitiones præcedentes.

Ex dictis facillimè colligitur, quo pacto à dato quolibet puncto ducenda ſit recta, quæ datam Hyperbolam contingat.

Si enim datum punctum in ipſa curva ſit, veluti K, inventis Aſymptotis[6], ductâque ad illarum alterutram rectâ alteri Aſymptoto parallelâ, ut K P, ac ſumptâ P G ipſi A P æquali, continget juncta G K D Hyperbolam in K[7]. quoniam uti G P ipſi P A, ita G K ipſi K D æqualis eſt[8].

Eodem modo, ſi datum punctum ſit in Aſymptotorum alterutra, veluti G, diviſâ A G bifariam in P, ductâque P K alteri Aſymptoto parallelâ, quæ curvæ occurrat[9] in K: continget juncta G K D[10] Hyperbolam in puncto occurſus K.

Sit deinde datum punctum intra angulum Aſymptotis comprehenſum, veluti I: ductâ à centro[11] per I diametro, ut A I H, quæ curvæ occurrat in K, ſumptâque A H ipſis A I, A K tertiâ proportionali, ſi per H agatur ordinatim applicata H C (nimirum, quæ contingenti in K æquidiſtet[12]), occurrens curvæ in C, continget juncta I C[13] Hyperbolam in eodem C puncto.

Sit denique datum punctum in alterutro angulorum, qui deinceps ſunt, angulo Hyperbolam continenti, veluti Q: ductâ per Q & centrum A ſecundâ diametro Q A B, tranſverſâque ipſi conjugatâ A K H (nimirum, quæ producta quamlibet rectam in Hyperbola ductam ipſi Q A B æquidiſtantem bifariam dividat), nec non tangente K G vel K D, Aſymptoto terminatâ; ſi fiat quadrato K G vel K D æquale rectangulum Q A B, ac per B ad ſecundam diametrum A H applicetur recta B C, nempe ipſi A K æquidiſtans[14], quæ curvæ occurrat in C: juncta Q C[15] in eodem puncto C Hyperbolam continget.

Manifeſtum porrò eſt, ſi datum punctum vel intra Hyperbolam foret, vel intra angulum ad verticem ei, qui Hyperbolam continet: fieri non poſſe[16], ut ab eodem puncto ducatur recta, quæ producta eandem non ſecet.

1 *per 1 Cor. 6 hujus.*
2 *per 4 ſexti.*
3 *per 17 quinti.*
4 *per Cor. 20 ſexti.*
5 *per 17 ſexti.*
6 *per 1 Cor. 10 hujus.*
7 *per 6 hujus.*
8 *per 2 ſexti.*
9 *per 2 Cor. 3 hujus.*
10 *per 2 ſexti, & 6 hujus.*
11 *invento per 7 Corol. 5 hujus.*
12 *per 3 Cor. 6 hujus.*
13 *per 11 hujus.*
14 *per 7 hujus.*
15 *per 12 hujus.*
16 *juxta 1 Cor. 3 hujus.*

CAPUT III.
DEFINITIONES TERTIÆ.

I.

SI quodlibet trianguli rectanguli latus, ſive id rectum angulum ſubtendat, ſive acutorum alterutri oppoſitum ſit, in eodem angulo moveatur, ita ut uterque moti lateris terminus ſemper exiſtat, maneatque in latere, cui ab initio junctus fuit, producto tamen ſive ab altera ſive ab utraque parte, prout opùs fuerit; idemque ille motus tam per angulos, qui præfato deinceps ſunt, quàm per eum, qui ipſi ad verticem eſt, ordine continuetur, donec ad poſitionem ſitumque priſtinum latus motum redierit, atque ita quolibet puncto quod in eodem, utcunque etiam producto, notare placuerit, curva deſcribatur linea, prædictum mobile latus *Deſcribentis Lineæ* nomine deſignabitur.

II.

Punctum autem quod in eodem ad deſcriptionem notare placuerit, *Punctum Efficiens*, aut *Punctum* ſimpliciter vocabitur.

III.

Diſtantia verò ejuſdem puncti tam ab uno quàm ab altero *deſcribentis* termino *Intervallum* dicetur.

IV.

Cum de *angulo* ſimpliciter ſermo erit, eum intelligemus, quem ſubtendit, & in quo movetur *deſcribens*.

V.

Anguli vertex, quem *deſcribens* continuato motu quaſi circumambulat, *Centrum* appellabitur.

VI.

VI.

Alterutrum *anguli* crus, utrinque, ſi opùs fuerit, productum, atque ab utraque parte à *Centro* ſumptum, magnitudine *intervalli* in altero crure terminati *Directrix* vocabitur.

VII.

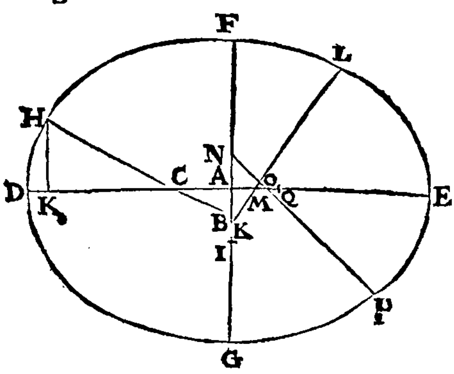
Deſcribentem in ſtatione prima dicemus, cùm ea ad *directricem* eſt perpendicularis: idem autem & tunc de *puncto* dictum eſto, ac cùm de iis ſimpliciter ſermo erit in ea ſtatione conſiderabuntur.

VIII.

Recta à *puncto* per *Centrum* ducta, interceptæ inter *punctum* & *centrum* dupla, *Secans* nuncupabitur.

Ut ſi trianguli rectanguli A B C latus B C moveatur in *angulo* B A C, ex. gr., ut terminus C tendat ad A, ſimulque B vel retrocedat vel promoveatur versùs I; ita tamen, ut iidem termini B & C ſemper ſint & exactè maneant in lateribus, quibus ab initio juncti fuêre, nempe B in latere A B, ac C in latere A C, productis ubi opùs fuerit; eodemque illo motu quolibet ſui puncto. ex. gr., H, aſſumpto, prout placuerit, ſive in ipſa B C, ſive in eadem producta, (ut à nobis plerumque aſſumetur, cum id naturæ quodammodo convenientiùs videatur,) deſcribat curvam lineam: nempe, ut, ubi punctum C pervenerit ad A, ac punctum B ad I, ſimulque H proceſſerit ad F, deſcripta ſit per motum puncti

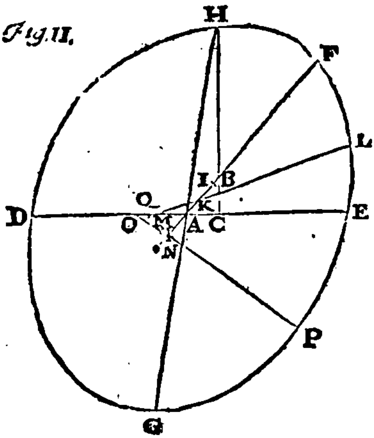
Fig. 1.



 H cur-

H curvæ portio H F: deinde puncto C promoto per A ad M, ſimulque termino B retrogreſſo vel progreſſo ab I ad K, ita ut H pervenerit ad L, deſcriptus ſit arcus F L: eodemque modo, ubi punctum B per K continuato motu pervenerit ad A, ſimulque punctum C per M progrediendo pervenerit ad Q, ac punctum H in E inciderit, deſcriptus ſit arcus L E: ac rurſus ubi punctum B per A progreſſum fuerit ad N, ſimulque punctum C ex Q vel retroceſſerit vel progreſſum ſit ad O, ita ut tunc punctum H pervenerit ad P, deſcriptus ſit arcus E P: atque ſi porrò eodem pacto motus ille continuetur, donec prædictum punctum per G & D tranſierit rurſuſque ad H pervenerit, deſcripta ſit tota curva H F L E P G D: erunt

Fig. II.



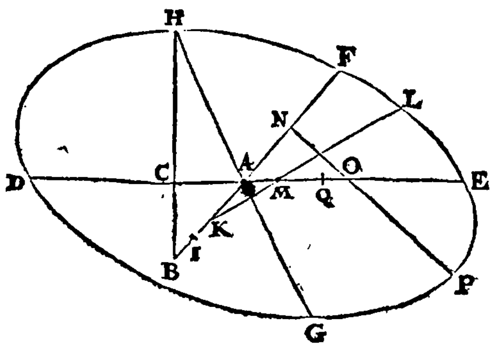
B C, quæ & in aliis ſtationibus eſt I A, K M, A Q, N O, &c. *linea deſcribens.*

H *punctum efficiens.*

H C & H B utrumque *intervallum.*

Anguli vertex, nempe punctum A, *Centrum.*

Fig. III.



Et ſi alterutrum *anguli* crus, exempli gratiâ, A C, utrinque, ſi opùs fuerit, productum ſit, veluti ad D & E; ita nempe, ut tam A D quàm A E æqualis ſit rectæ H B, *intervallo* videlicet, quod in altero crure terminatur, tota D E *directrix* erit.

Cum autem *deſcribens* B C eidem *directrici* D E eſt perpendicularis, quod quidem fit, quando ipſa poſitione eadem eſt cum crure A B, uti A I, *angulo* nempe exiſtente recto, ut in

ut in prima figura, aut ſi obliquus fuerit *angulus*, in ipſa poſitione B C, uti exhibetur in ſequentibus figuris, erit I A, caſu primo, & B C, caſu altero, *deſcribens in ſtatione prima* ſeu *deſcribens* ſimpliciter, ideoque punctum F vel H, quod eidem in directum eſt, *punctum efficiens in ſtatione prima* ſeu *punctum* ſimpliciter.

Ac proinde F A G [a] vel H A G [b], nempe ab eodem *puncto* per centrum A ducta atque ipſius F A ſive H A dupla, *ſecantem* repræſentat.

[a] in caſu fig. I & ſimilib.
[b] in caſu fig. II & III ac ſimilib.

THEOREMA XII.

Propoſitio 13.

In quocunque *angulo*, & quibuſlibet *intervallis*, juxta definitiones hoc capite propoſitas, curvâ deſcriptâ, hoc ipſi proprium erit, ut quadratum cujuſlibet *ſecanti* æquidiſtantis, à quolibet *directricis* puncto ad curvam applicatæ, eandem rationem habeat ad rectangulum ſub partibus *directricis* per applicatam factis, quam quadratum *ſecantis* ad quadratum *directricis*.

Sit in quocunque *angulo* B A C, *intervallis* quibuſlibet H C, H B, deſcripta curva D H E G, cujus *directrix* D A E, *ſecans* F A G [a] vel H A G [b]; atque à puncto I in *directrice* D E utcunque aſſumpto, ad curvam applicata I L *ſecanti* F A G [a] vel H A G [b] æquidiſtans: dico fore quadratum applicatæ L I ad rectangulum D I E, ut eſt quadratum *Secantis* F G [a] vel H G [b] ad quadratum *directricis* D E.

[a] in caſib. fig. I, II, & ſimilibus.
[b] in caſib. cæterarum fig. & ſimilibus.

Sit enim recta K M *deſcribens* in ea ſtatione, uti fuit, cùm per eandem deſcriptum eſt punctum L. Et primò quidem, ſi *angulus* B A C rectus ſit [a], ductâ K N *directrici* D E parallelâ, quæ occurrat applicatæ L I, aut eidem productæ, ſi opùs fuerit, in N: cum *intervallum* K L æquale ſit dimidiæ *directrici* A E vel A D, ideoque & K L quadratum æquale A E vel A D quadrato, ablatis utrinque æqualibus, nimirum [1], quadrato K N ab una, & quadrato A I ab altera parte, reſidua quoque, nempe L N quadratum & D I E rectangulum [2], æqualia erunt. Unde cum [3] ſit ut L I quadratum ad L N quadratum, id eſt [4], ad D I E rectan-

1 *per* 34 *primi.*
2 *per* 47 *primi, &* 5 *ſecundi.*
3 *per* 4 *&* 22 *ſexti.*
4 *per ſupra demonſtr.*

Fig. I.

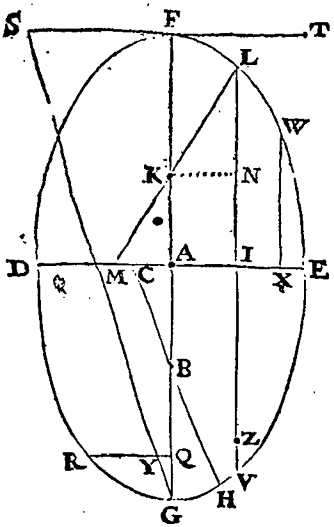
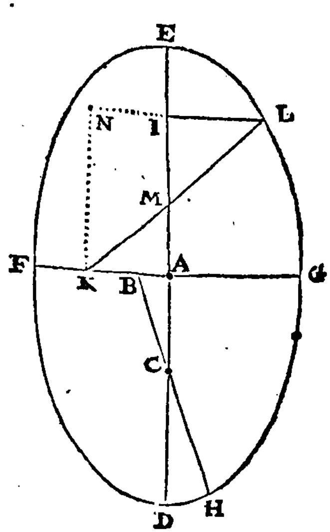
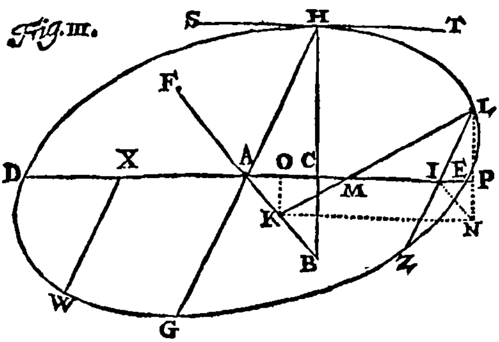


Fig. II.



1 per 15 quinti. gulum, ita LM quadratum ad LK quadratum, hoc eſt, ita FA quadratum ad AE quadratum, ſive [1] ut FG quadratum ad DE quadratum, conſtat priori caſu propoſitum.

Fig. III.



Non ſit deinde *angulus* BAC rectus[b], ducanturque ad *directricem*, eamvè productam, ſi opùs fuerit, rectæ KO, LP *deſcribenti* BC parallelæ, ideoque ad *directricem* DE perpendiculares, ut & IN lateri AB parallela, quæ ipſi LP, eidemvè productæ, ſi opùs fuerit, occurrat in N; ita ut [2] ſimilia ſint triangula AHC & ILP, itemque

2 per 29 primi.

que A H B & I L N, ac denique jungatur K N. Quoniam itaque eſt [1], ut B A ad K A, ſive ut B C, id eſt, M K, ad K O, ita M L, hoc eſt, H C, ad L P; eſt autem H C ad L P, ita H A ad L I, & ita B A ad N I, ac per conſequens B A ad K A, ut eadem B A ad N I: erit [2] K A ipſi N I æqualis. Sunt autem & parallelæ, ex hypotheſi. Quare & A I, K N æquales & parallelæ erunt [3]. Porrò cum æquales ſint rectæ K L & A E vel A D, ideoque & ipſarum quadrata, hinc ſubductis ab iis æqualibus, quadrato nimirum K N ab una, ac quadrato A I ab altera parte, erunt

[1] per 4 ſexti.

[2] per 9 quinti.

[3] per 33 primi.

Fig. IV.

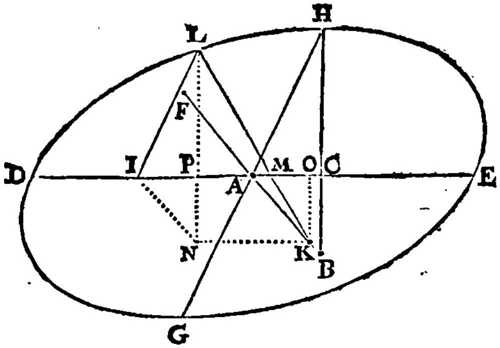


Fig. V.

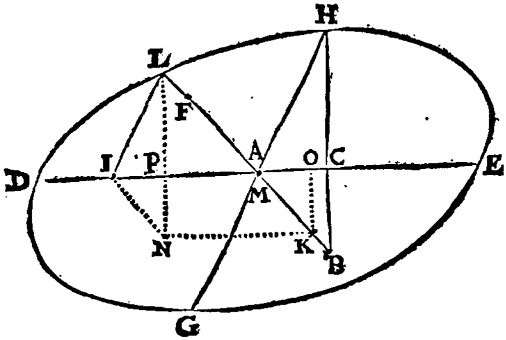


Fig. VI.

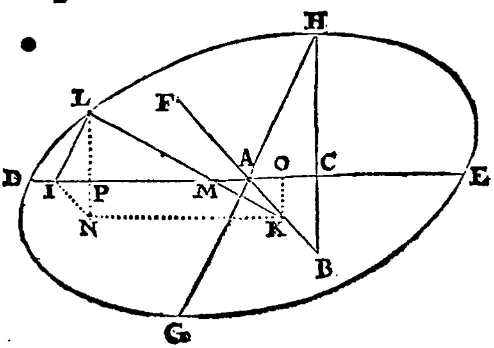


Fig. VII.

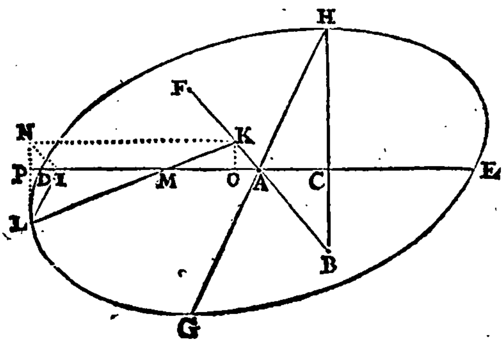
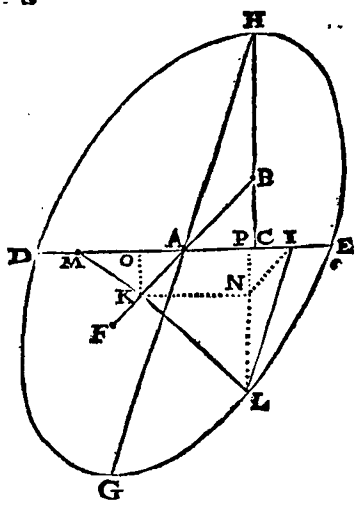


Fig. VIII.



erunt quoque reſidua, quadratum nempe L N & rectangulum D I E æqualia [1]. Unde cum ſit [2] L I quadratum ad L N quadratum, hoc eſt [3], ad D I E rectangulum, ut A H quadratum ad H B quadratum, id eſt, ad A E quadratum, ſive [4] ut H G quadratum ad D E quadratum, erit etiam hoc caſu propoſitum manifeſtum.

[1] *per 47 primi, & 5 ſecundi.* [2] *per 4 & 22 ſexti.* [3] *per ſupra demonſtr.*

[4] *per 15 quinti.*

Atque ita liquet, prædictam curvam eam ipſam eſſe, quæ Veteribus Ellipſis dicta fuit, *directricem* verò ac *ſecantem* eas ipſas, quas conjugatas diametros, aut, ſi *angulus* rectus fuerit, conjugatos axes vocârunt.

Conjugatas itaque diametros appellabimus binas rectas per centrum ductas, ac utrinque Ellipſi terminatas;

tas; ita ut (quemadmodum de *directrice* & *ſecante* jam demonſtratum eſt,) quadrata rectarum quæ alteri ipſarum applicantur alteri æquidiſtant, ita ſe habeant ad rectangula ſub partibus per applicationem factis, ut quadratum alterius ad quadratum ejuſdem quæ per applicatas ſecatur.

Et hæc quidem, cui applicatæ inſiſtunt, tranſverſa; illa verò, cui eædem æquidiſtant, ſecunda diameter vocabitur.

Cæteræ autem omnes, per centrum ductæ ac utrinque Ellipſi terminatæ, diametri ſimpliciter dicentur.

Rectam lineam quæ tranſverſæ ſecundæque diametro tertia eſt proportionalis, Latus Rectum ſive Parametrum vocabimus ad tranſverſam diametrum pertinentem.

Notandum tamen eſt, ſi *angulus* rectus ſit, ac *punctum* ab utroque *deſcribentis* termino æqualiter diſtet, curvam, quæ motu ejuſdem *puncti*, uti prædictum eſt, deſcribitur, circumferentiam Circuli eſſe.

Corollarium. 1.

Ex ipſa demonſtratione & collatione figuræ primæ cum ſecunda manifeſtum eſt: in Ellipſi, conjugatorum axium tranſverſum etiam ſecundum eſſe, & contra. Sive enim LI vel huic vel illi axi applicata ſit, eodem modo ſemper probabitur eſſe quadratum ejuſdem applicatæ ad rectangulum ſub partibus axis cui applicatio fit, ut quadratum axis alterius ad quadratum axis prædicti qui per applicatam ſecatur.

Corollarium 2.

Apparet porrò rectam per punctum ductam *directrici* parallelam, hoc eſt, eam, quæ per terminum ſecundæ diametri tranſ-

verſæ æquidiſtans ducitur, Ellipſin in eodem termino, & in nullo præterea puncto contingere, multò minus eandem ſeca-

Fig. I.

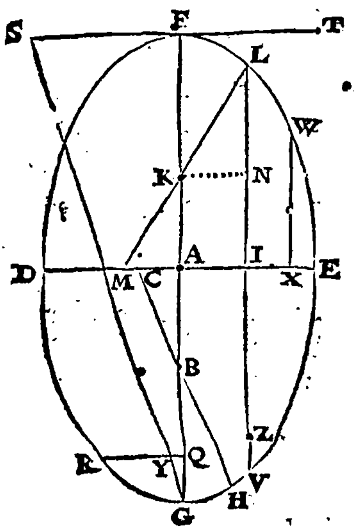
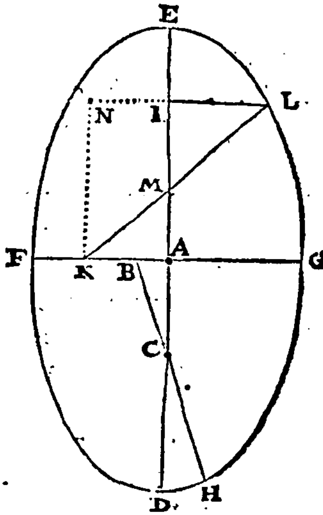


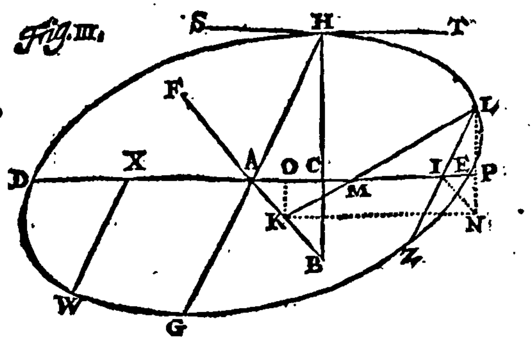
Fig. II.



re. Si enim per F [a] aut H [b] terminum ſecundæ diametri GF [a] vel GH [b] ductâ rectâ ST, tranſverſæ diametro DE paralle-

[a] in caſu fig. I & ſimilib.
[b] in caſu fig. III & ſimilib.

Fig. III.



lâ, aſſumatur aliud quodcunque in curva punctum, veluti L, quod deſcriptum ſit *deſcribente* in ſtatione KM, ducaturque

LI [a] vel LP [b] ad tranſverſam diametrum perpendicularis, fiet ut in triangulo MLI [a] vel MLP [b] recta ML, id eſt, perpendicularis FA [a] vel HC [b], major ſit [1] quàm LI [a] vel LP [b]; adeò ut punctum L, quod in curva utcunque aſſumptum eſt, id eſt, tota Ellipſis, præter F [a] aut H [b] punctum, infra ductam ST, ſeu versùs Ellipſeos centrum, cadat.

[a] in caſu fig. I & ſimilib.
[b] in caſu fig. III & ſimilib.
[1] per 18 primi.

Corollarium 3.

Manifeſtum quoque eſt in Ellipſi applicatarum quadrata ad ſe invicem eſſe, ut rectangula ſub diametri portionibus per applicatas factis. Ut ſi applicatæ ſint LI, WX, erit quadratum WX ad rectangulum DXE, ut quadratum LI ad rectangulum DIE: cum [2] utriuſque ratio ſit eadem quæ quadrati FG [a] vel HG [b] ad quadratum DE, ſive quæ parametri ad tranſverſam diametrum; ideoque & permutatim WX quadratum ad LI quadratum, ut DXE rectangulum ad DIE rectangulum.

[2] per 13 hujus.

Corollarium 4.

Conſtat etiam ordinatim ad axem ſive diametrum applicatas utrinque ad Ellipſin productas ab axe ſive diametro bifariam ſecari. Ut, ſi applicata LI producta Ellipſi occurrat in V, quoniam eſt [3] quadratum LI ad rectangulum DIE, ut quadratum VI ad idem DIE rectangulum; erit [4] quadratum LI æquale quadrato VI, ideoque & ipſa recta LI ipſi rectæ VI æqualis.

[3] per Cor. præced.
[4] per 9 quinti.

Corollarium 5.

Conſtat porrò, applicatas Ellipſi in pluribus quàm duobus punctis non occurrere. Si enim LIV alio ſui puncto præter L & V, exempli gratiâ, puncto Z, in Ellipſi eſſet, rectæ IL & IZ [5], ideoque IV & IZ pars & totum, æquales forent, quod eſt abſurdum.

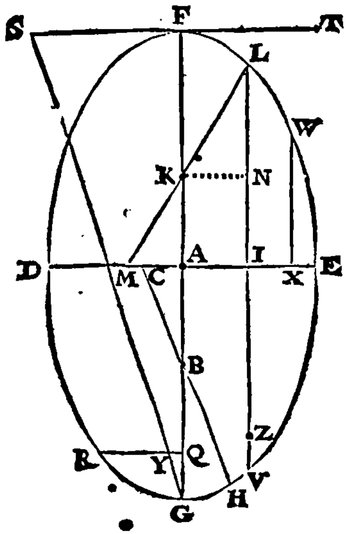
[5] per Cor. præced.

Corollarium 6.

Ex dictis porrò colligitur, ſi ab extremitate tranſverſæ diametri,

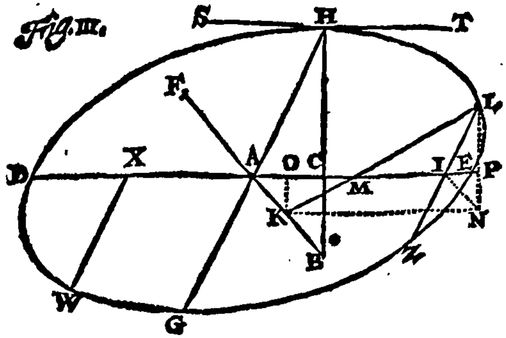
[a] in caſu fig. I & ſimilib. metri, ut puta F G [a], eductâ parametro F S ſecundæ diametro D E parallelâ, jungatur S G, atque ad eandem diametrum recta

Fig. I.



quælibet ordinatim applicetur, ut R Q, quæ ſecet junctam S G in Y: fore rectangulum F Q Y quadrato applicatæ R Q æquale.

Fig. III.



[1] per 13 hujus. [2] per Cor. 20 ſexti. [3] per 1 ſexti. Quoniam enim eſt [1] G F quadratum ad D E quadratum, id eſt [2], G F ad F S, ſive G Q ad Q Y, hoc eſt [3], G Q F rectangulum ad

Y Q F

Y Q F rectangulum, ut [1] idem G Q F rectangulum ad R Q quadratum, æqualia erunt [2] Y Q F rectangulum ad R Q quadratum: id eſt, ſi veterum Geometrarum more id proponi placeat. [1] *per 13 hujus.* [2] *per 9 quinti.*

Quæ ab Ellipſi ad diametrum applicatur poteſt ſpatium adjacens lateri recto, latitudinem habens lineam quæ à diametro inter ipſam applicatam & diametri verticem abſcinditur, deficiensque figurâ ſimili ſimiliterque poſitâ ei quæ lateribus tranſverſo rectoque continetur.

Corollarium 7.

Patet quoque ex antedictis, quo pacto, datis quibuſlibet diametris conjugatis, Ellipſis in plano deſcribatur.

Ut ſi conjugatis axibus D A E & F A G [a] Ellipſis ſit deſcribenda, *deſcribente* B C, quæ ſemi-axium A D, A F differentia ſit, *intervallis* verò H C, H B, ipſis A F, A D utroque utrique æqualibus, in *angulo* D A G, curva deſcribatur, eritque hæc ipſa Ellipſis quæſita. [a] in caſu fig. I & ſimilib.

At ſi aliis quibuſlibet conjugatis diametris, obliquè ſeſe interſecantibus, ut D E, H G [b], Ellipſis ſit deſcribenda: demiſsâ à termino unius ad alteram perpendiculari, ut H C, ſumptâque in eadem ſeu in ipſa producta, ſi opùs fuerit, rectâ H B ipſi D A vel A E æquali, & per B & A ductâ rectâ B A F, ſi *deſcribente* B C, *intervallis* verò H C, H B, in *angulo* B A C Ellipſis deſcribatur, erit hæc ea ipſa quæ quæritur. [b] in caſu fig. III & ſimilib.

Itaque cum datis diametro parametroque, nec non angulo quem faciunt cum eadem diametro ordinatim ad ipſam applicatæ, conjugatæ quoque diametri datæ ſint: ſimul quoque innoteſcit, quo pacto & illis datis Ellipſis deſcribatur.

Theorema XIII.

Propoſitio 14.

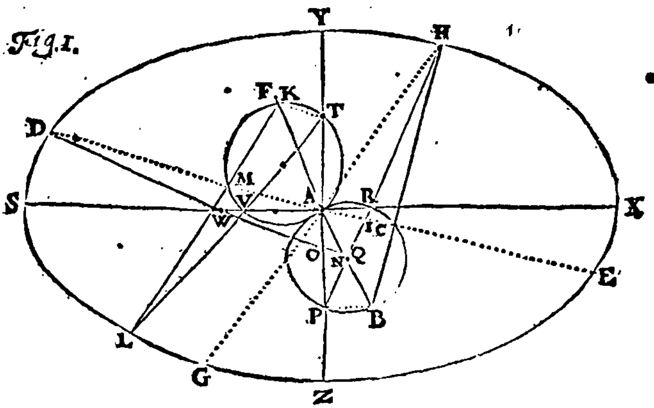
In Ellipſi circa quoſcunque axes deſcriptâ, ducta quælibet diameter tranſverſa eſt, habetque ſecundam ſibi conjugatam.

 Sit

Sit in Ellipſi S Y X Z, cujus centrum A, axes verò S X, Y Z, ducta quælibet diameter D A E; & ſic deſcribens O W in ea ſtatione, uti fuit cùm deſcriptum eſt punctum D vel E; ita ut intervalla ſint D W, D O. Deinde applicatâ eâdem deſcribente in ſtatione reciproca, hoc eſt, in alterutro angulorum qui ipſi W A O deinceps ſunt, veluti P R, ita ut rectæ A R, A P ipſis A W, A O reciprocè ſint æquales, nimirum A R ipſi A O, & A P ipſi A W, ac proinde triangulum W A O [1] ſimile & æquale triangulo P A R, ab Ellipſeos puncto H, quod deſcribenti P R in directum eſt, ducta ſit diameter altera H A G. Dico diametrum D E tranſverſam eſſe, H G autem ſecundam ipſi D E conjugatam: id eſt, ſi, ductâ H C ad D E perpendiculari, in eadem H C, produ-

[1] *per 4 primi.*

Fig. I.



ctâ, ſi opus fuerit, ſumatur H B ipſi D A æqualis; ductâque per B & A rectâ B A F, in angulo B A C, intervallis verò H C, H B, Ellipſis deſcribatur, cujus utique conjugatæ diametri ſunt in D E, & H G [2]: dico illam cum expoſita Ellipſi omnino eandem fore, ita ut altera alteri per omnia congruat.

[2] *per 13 hujus ejusque Corol. 7*

Aſſumpto enim in expoſita Ellipſi alio quopiam puncto L, quod quidem deſcriptum ſit deſcribente in ſtatione T V, diametro T V circulus deſcribatur, qui, propter angulum T A V rectum *, neceſſariò quoque per A tranſibit [3], lineaſque B A F &

D A E

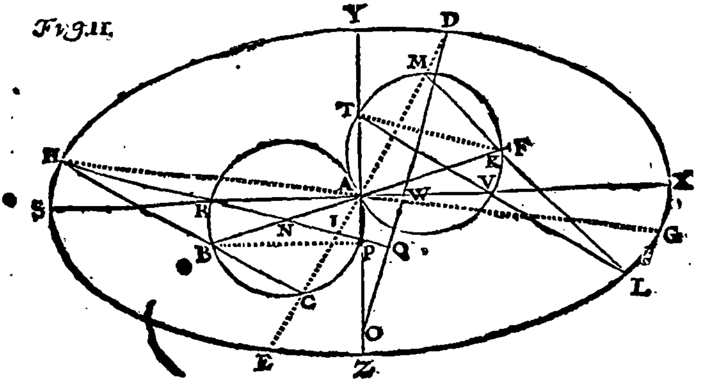
* aut certè, quia punctorum T & V alterutrum cum puncto A coincidit, uti eſt caſus in fig. VI

[3] *per converſam 31 tertii.*

D A E alibi etiam ſecabit [b], uti in K & M. Deinde junctâ K M, eaque productâ verſùs L, agantur T K, P B.

[b] aut illarum alteram continget, alteram verò ſecabit, ut in caſib. fig. III & IV.

Fig. II.



Cum igitur ipſarum D O, H P, productarum, ſi opùs fuerit, interſectio ad Q fiat ad angulos rectos, ob ſimilitudinem trianguli O Q P cum utroque triangulorum O A W, R A P [c], notato ipſarum D E, P H interſectionis puncto I, erunt triangula

[c] vel, ſi puncta O & P coïncidant, ob angulos A O W, A P R ſemirectos.

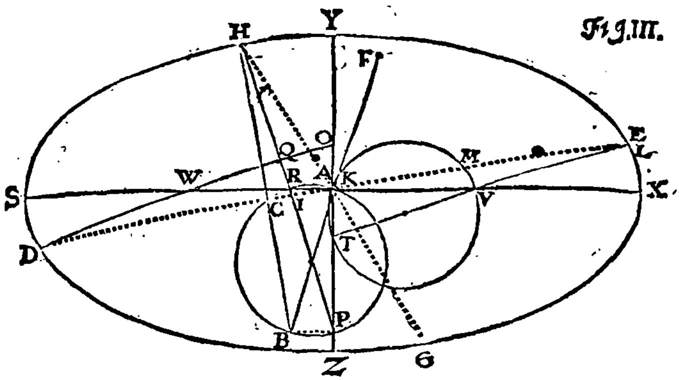


Fig. III.

I Q D, I C H æquiangula, ob angulos ad Q & C rectos, ad I verò aut communem aut ad verticem. Ideoque cum triangula O D A, P H B latera O D, D A lateribus P H, H B, utrumque utrique, circum æquales angulos æqualia habeant; erit & [d] baſis O A,

[d] per 4 primi.

O A, ſive recta A R, baſi P B, angulusque D O A, id eſt P R A, angulo H P B æqualis; ac propterea [1] recta P B ipſi R A parallela. Hinc cum triangulorum R A P & B P A latera R A, A P lateribus B P, P A circa æquales angulos, nempe rectos, utrumque utrique ſint æqualia: erit & [2] baſis A B baſi P R, ſeu deſcribenti T V, angulusque A R P angulo P B A æqualis. Quocirca & circulus diametro A B deſcriptus (qui quidem, ob angulos A C B, A P B rectos, ac A B P, A R P æquales, per puncta C, P [3], & R [4] tranſit) circulo T K V æqualis erit. Unde cum anguli P B C, B P R ipſis T K M, K T V, uterque utrique, æquales ſint, nempe P B C ipſi T K M [d], quoniam uterque cum angulo P A C ſeu T A M [5] binos rectos conſtituit [e], & B P R ipſi

[1] *per* 27 *primi.*
[2] *per* 4 *primi.*
[3] *per converſam* 31 *tertii.*
[4] *per converſam* 21 *tertii.*

[d] pro caſu fig. II adde: ideoque & hi qui ipſis deinceps ſunt. [5] *per* 22 *tertii.* [e] in caſu fig. II uterque angulo P A C ſeu T A M æqualis eſt *per* 20 *tertii*. In caſu fig. III uterque cum angulo P A C binos rectos conſtituit, nempe hic *per* 13 *primi*, & ille *per* 22 *tertii.* In caſu fig. IV æquales ſunt anguli P B C, T K M, quoniam prior cum angulo P A C, poſterior verò cum angulo T V A (qui quidem P A C, T V A æquales ſunt *per* 32 *tertii*) binos rectos conſtituit *per* 22 *tertii.* In caſu fig. V, T K M ſive T A M æqualis eſt angulo P B C, quia uterque cum angulo P A C duos rectos conſtituit *per* 13 *primi* & 20 *ac* 22 *tertii.* In caſu fig. VI æquales ſunt anguli P B C, T K M, quoniam angulus P A C æqualis eſt ei, qui in ſegmento A V M conſtitueretur *per* 32 *tertii*, quorum quidem prior cum angulo P B C, poſterior verò cum angulo T K M binos rectos conſtituit *per* 22 *tertii.*

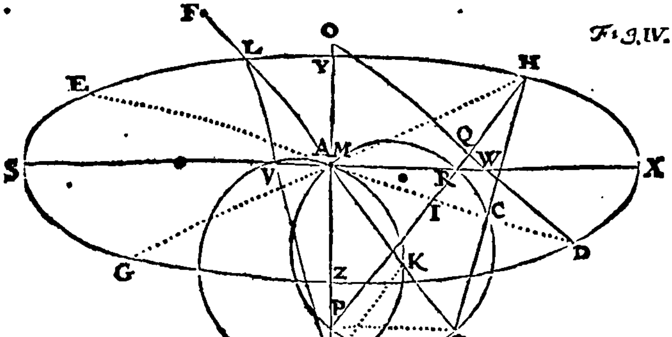


Fig. IV.

K T V, propterea quòd uterque [6] angulo B A R ſeu K A V ſive F A V æqualis eſt [f]; ſintque porrò, ob æquales angulos P A B, T A K [7], tam peripheriæ P B, T K, quàm earum ſubtenſæ, nem- pe

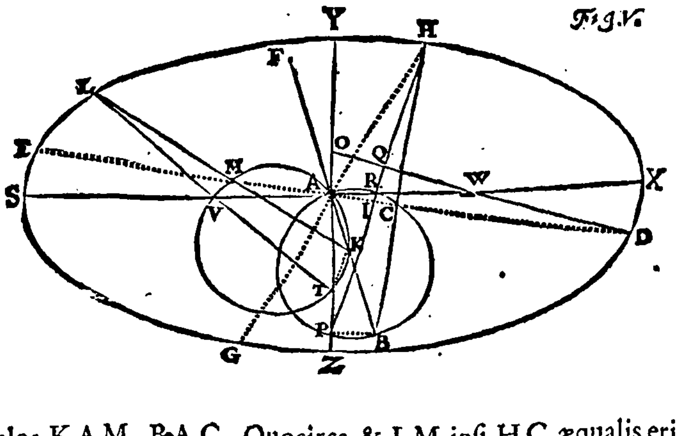
[6] *per* 20 *tertii*, atque in caſu fig. III per eandem & 32 *tertii.*

[f] In caſibus fig. IV & V tam angulus B P R ſeu B A R, quàm angulus K T V cum angulo K A V duos rectos conſtituit *per* 13 *primi*, & 22 *tertii.* [7] *per* 26 & 29 *tertii.*

pe latera P B, T K dictis æqualibus angulis adjacentia inter ſe æqualia [g]: apparet ſicuti rectæ B C, P R productæ concurrunt in H, ita quoque rectas K M, T V productas, & quidem, cum ipſi P H æqualis ſit T L, in ipſo puncto L concurſuras. quippe ex antedictis [1] ſimilia atque in totum æqualia ſunt triangula B P H, K T L, adeoque & latus K L lateri B H æquale. Eſt autem [2] & ſubtenſa K M ſubtenſæ B C æqualis [h], ob æquales an-

[g] In caſu fig. III. ubi recta B A F tangit circulum T K V, æqualia ſunt latera B P, T K ob angulos B A P, T V K æquales *per 32 tertii.* In caſu fig. V I, ubi recta P A Y contingit circulum T K V, æquales ſunt ſubtenſæ B P, T K ob angulos P A B, T M K æquales *per 32 tertii.* [1] *per 26 primi.* [2] *per 26 & 29 tertii.* [h] In caſu fig. I I I, K M ipſi B C eſt æqualis, quandoquidem angulus qui conſiſteret in ſegmento K T M æqualis foret angulo F A M ſeu B A C *per 32 tertii.* In caſu fig. IV, K M ipſi B C eſt æqualis, quandoquidem angulus K T M æqualis eſt angulo K A C ſeu B A C *per 32 tertii.* In caſu fig. V, K M ipſi B C eſt æqualis, quandoquidem angulus in ſegmento B C æqualis foret angulo K A M, utpote cum tam hic quam ille cum angulo C A B duos rectos conſtitueret *per 13 primi & 22 tertii.*

Fig. V.



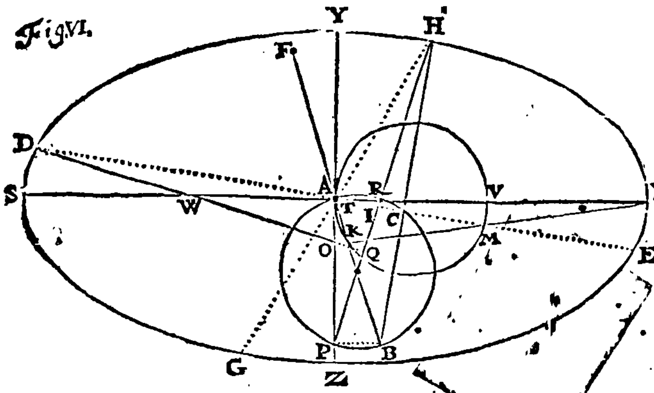
gulos K A M, B A C. Quocirca & L M ipſi H C æqualis erit. Unde cum deſcribens ſit K M, utpote ipſi B C æqualis, ac conſtituta in angulo K A M (qui cum ipſo B A C vel idem [i], vel ei ad verticem [k], vel denique ipſi deinceps eſt [l]) aut certè cum alterutro crurum coïncidens [m], atque ex demonſtratis æqualia quoque ſint intervalla H B, H C intervallis L K, L M: ſequitur punctum L, in expoſita Ellipſi utcunque ſumptum, id eſt, totam Ellipſin S Y X Z, eſſe in Ellipſi, quæ in angulo B A C, intervallis H B, H C, deſcribitur, ideoque alteram alteri per omnia

[i] ut in caſu fig. V I.
[k] ut in caſibus fig. I. & II.
[l] in caſu fig. V.
[m] ut in caſibus fig. III. & IV.

omnia congruere. Sunt autem [1] hujus conjugatæ diametri D E, H G. Quare & illius, quæ cum ipſa eadem eſt, conjugatæ dia-

[1] per 13 hujus, ejuſque Cor. 7.

Fig. VI.



metri erunt, nimirum D E tranſverſa, & H G ſecunda. Quod demonſtrandum erat.

Corollarium. I.

Hinc colligitur non ſolùm Ellipſes omnes ſuos habere axes, ſed & quo pacto datis quibuſlibet diametris conjugatis, ejus Ellipſeos cujus diametri ſunt, axes inveniantur.

Ut ſi cujuſcunque Ellipſeos conjugatæ diametri ſint D A E & H A G, ductâ H B, ſemidiametro D A vel A E æquali, atque ad D E perpendiculari, junctâque B A ac ipſâ bifariam in N diviſâ, ſi centro N intervallo N A vel N B circulus deſcribatur, ſecans rectam per H & N ductam in P & R: erunt rectæ H P, H R ſemi-axes magnitudine, quæ idcirco utrinque à centro A versùs, aut per puncta R & P, æquali longitudine in directum poſitæ, ſicut totæ S X & Y Z, exhibebunt magnitudine ac poſitione quæſitos axes ejuſdem Ellipſeos, cujus D A E & H A G conjugatæ diametri exiſtunt.

Ductâ enim P B, ſumptâque A O ipſi A R, ideoque [2] & ductæ P B æquali, agatur D O, occurrens ipſi S X in W. Cum itaque ob angulum A C B rectum deſcriptus circulus etiam per C tranſeat [3], erunt anguli P B H & O A D æquales, quoniam uter-

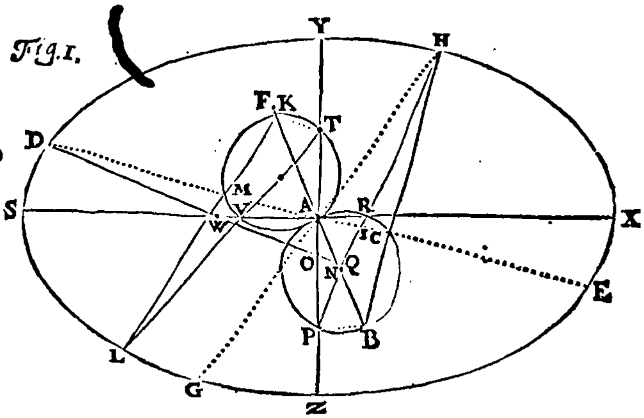
[2] per 4 primi.

[3] per 31 tertii.

que

que cum angulo * P A C ſeu P B C duos rectos conſtituit [1]. Unde cum triangula O A D, P B H latera O A, A D lateribus P B, B H, utrumque utrique, & quidem circa æquales angulos æqualia habeant: erit quoque [2] baſis O D baſi P H, id eſt, rectæ S A vel A X, ut & angulus A O D angulo B P H ſeu [3] P R A æqualis. Hinc cum æqualia ſint triangula R A P, O A W, propter angulos ad R & O æquales, atque [4] R A P, O A W rectos, nec non latera R A & O A æqualia: erit etiam [5] latus A W lateri A P, ut & latus O W ipſi P R æquale. Quocirca cum [6] *deſcribentes* ſint

* nimirum *cum angulo* P A C in caſu fig. I. & ſimilibus, & *cum angulo* P A C *ſeu* P B C in caſu fig. II. & ſimilibus. [1] *per* 13 *primi &* 22 *tertii.* [2] *per* 4 *primi.* [3] *per* 29 *primi.* [4] *per* 31 *tertii &* 13 *primi.* [5] *per* 26 *primi.* [6] *per* 13 *hujus.*



O W, P R ejus Ellipſeos, cujus axes ſunt S X, Y Z, & quidem in ſtatione reciproca conſtitutæ, *punctaque efficientia* D & H: manifeſtum eſt ex ſuperiori demonſtratione, Ellipſin, quæ axibus S X, Y Z deſcribitur, cum ea, cujus diametri conjugatæ ſunt D E & H G, omnino eandem eſſe:

Atque ita, quæ de Ellipſi, circa quoſcunque axes deſcripta, ſuperiori Theoremate propoſita ac demonſtrata ſunt, etiam cuilibet Ellipſi, & circa quaſcunque diametros conjugatas deſcriptæ, convenire, manifeſtum eſt.

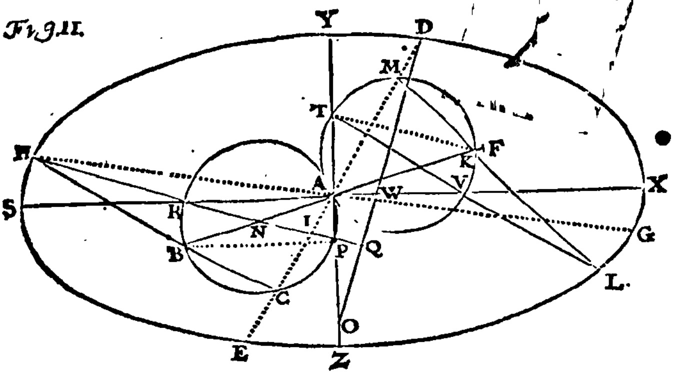
Corollarium 2.

Sequitur porrò ex demonſtratione ejuſdem Theorematis, in Ellipſi diametros omnes à centro bifariam ſecari. demonſtratum enim eſt, in diametro D E, utcunque ductâ, partem A E parti D A æqualem eſſe, cum utraque *intervallo* H B æqualis ſit.

Corollarium 3.

Patet inſuper in Ellipſi, quarumcunque diametrorum conjugatarum tranſverſam etiam ſecundam eſſe, & contra. Ut, ſi conjugatarum diametrorum D E, H G tranſverſa ſit D E, & H G ſe-

Fig. II.



cunda; cum in Ellipſi ducta quælibet diameter [1] tranſverſa ſit, habeatque ſecundam ſibi conjugatam, erit quoque H G tranſverſa. At verò & D E ſecundam eſſe ipſi H G conjugatam, factâ collatione figuræ I cum II tranſpoſitis tantùm literis, ac mutatis mutandis demonſtratum ſimul apparebit.

[1] *per* 14 *hujus ejuſque Corol.* 1.

Corollarium 4.

Quare & quæ per terminum tranſverſæ diametri ſecundæ æquidiſtans ſeu ordinatim applicatis parallela ducitur Ellipſin in eodem termino & in nullo præterea puncto contingit, totaque extra Ellipſin cadit [2].

[2] *per* 2 *Cor.* 13. *&* 3 *Cor.* 14 *hujus.*

Co-

Corollarium 5.

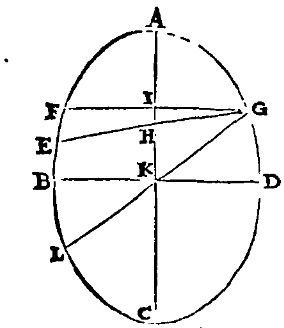
Adeoque quælibet recta, à quovis curvæ puncto ad quamcunque Ellipſeos diametrum ordinatim applicata, tota intra Ellipſin cadit; utpote cum ea nec in totum extra Ellipſin cadere [1], nec eidem in pluribus quàm duobus punctis occurrere [2] poſſit.

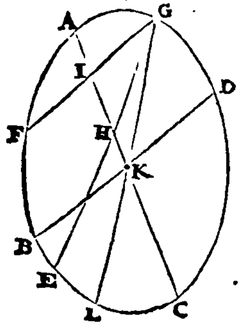
1 *per Cor. præcedens.* 2 *per 5 Cor. 13 hujus.*

Theorema XIV.

Propoſitio 15.

Quæ bina quælibet Ellipſeos puncta conjungens recta linea bifariam à diametro dividitur, erit aut per centrum ducta, aut ad eandem diametrum ordinatim applicata, hoc eſt, conjugatæ diametro æquidiſtans.





Si enim in Ellipſi A B C D, cujus centrum K, à diametro A K C bifariam divideretur recta E H G, quæ neque per centrum tranſeat, neque conjugatæ diametro B D æquidiſtans ſit; applicatâ ordinatim G I F, ductâque per centrum rectâ G K L: Quoniam eſſet, ut G H ad H E, ita tam G I ad I F [3], quàm G K ad K L [4], recta per F & E, nec non per E & L ducta foret una linea recta diametroque A C parallela [5]; ideoque ad alteram ipſi conjugatam, nempe ad B D, ordinatim applicata [6], atque Ellipſi in tribus punctis occurreret; quod fieri non poſſe ſupra [7] oſtenſum eſt.

3 *per 4 Cor. 13 hujus.* 4 *per 2 Cor. 14 hujus.* 5 *per 2 ſexti.* 6 *per 13 & 3 Cor. 14 hujus.* 7 *in 5to Coroll. 13 hujus.*

Corollarium 1.

Ideoque ſi diameter rectam quamlibet in Ellipſi non per centrum ductam bifariam dividat, omnes quoque ipſi æquidiſtantes bifariam ſecabit [8].

8 *per 4 Cor. 13. & 15tam hujus.*

Corollarium 2.

Quocirca ſi in Ellipſi binæ quælibet rectæ ſibi invicem æquidiſtantes ductæ ſint, quæ utramque bifariam dividet recta linea per illius centrum tranſibit, ſeu ejuſdem diameter exiſtet. Quippe quæ per medium unius æquidiſtantium diameter ducetur per medium quoque alterius æquidiſtantium tranſibit [1]. Unde apparet, quo pacto datæ Ellipſeos diametros quotlibet, ſimulque ad eaſdem ordinatim applicatas, nec non & ejus centrum, utpote quod duarum pluriumve diametrorum communis interſectio eſt, ideoque & diametros conjugatas, axeſque [2] invenire liceat.

[1] per 1 Cor. 15 hujus.

[2] per 1 Cor. 14 hujus, alterve, ut cuilibet obvium eſt.

Corollarium 3.

Ex dictis facilè apparet, quamlibet rectam, quæ bina quæcunque Ellipſeos puncta conjungit, totam intra Ellipſin cadere [3]: utpote cum ipſa [4] vel diameter ſit, vel ordinatim applicata ad eam diametrum, quæ per ipſius medium & centrum ducitur.

[3] per 5 Cor. 14 hujus.

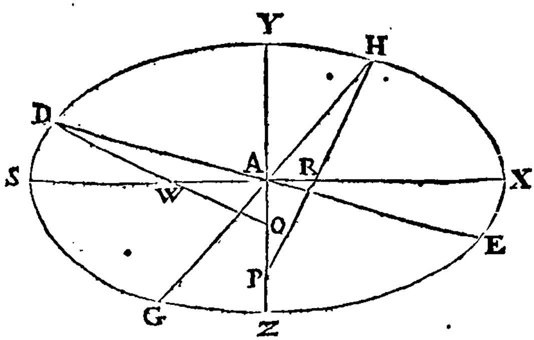
[4] per 15 hujus ejuſque Cor. 1.

PROBLEMA II.

Propoſitio 16.

In data quacunque Ellipſi ductæ cuilibet diametro alteram conjugatam invenire.

In data Ellipſi S Y X Z ductæ utcunque diametro D A E altera conjugata invenienda ſit. Inventis [5] axibus S A X & Y A Z, atque à termino D vel E ad axium alterutrum, veluti ad Y A Z, applicatâ rectâ, ut D O, ſemi-axi alteri



S A æquali, quæ producta, ſi opùs fuerit, ſecet eundem axem alte-

[5] per 2 Cor. 15 hujus.

alterum, uti in W, applicetur in ſtatione reciproca ipſi O W, eidem æqualis recta P R, nempe ut A P, A R ipſis A W, A O ſingulæ ſingulis æquales ſint, ac producta P R Ellipſi occurrat in puncto H, à quo ſi per centrum A ducatur recta H A G, Ellipſi terminata: conſtat, per ea, quæ ad Propoſitionem 14^{tam} hujus libri demonſtrata ſunt, eandem H A G eſſe diametrum ipſi D E conjugatam.

Atque ita ſimul apparet, ſingulis diametris ſuas quoque diſtinctas conjugatas diametros eſſe, eidemque diametro unam tantum conjugatam duci poſſe.

Corollarium.

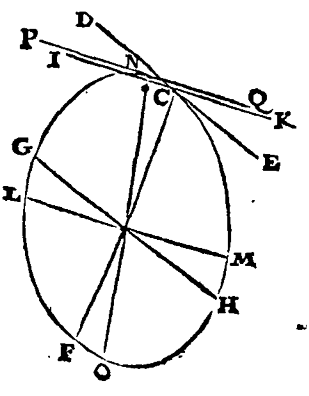
Unde porrò perſpicuum fit, quo pacto per datum quodlibet in Ellipſi punctum recta ducatur, quæ curvam in eodem ac in nullo alio præterea puncto contingat. Si enim ductâ per datum punctum & centrum diametro, inventâque alterâ ipſi conjugatâ [1], per idem punctum recta ducatur inventæ diametro conjugatæ æquidiſtans: erit eadem recta [2] contingens quæſita.

[1] *per 16 hujus.*
[2] *per 4 Cor. 14 hujus.*

THEOREMA XV.

Propoſitio 17.

Ellipſin in uno eodemque puncto præter rectam, quæ parallela eſt diametro illi, quæ per punctum & centrum ducitur, conjugatæ, alia recta non contingit.



Contingat Ellipſin C H F G in puncto C recta D C E, parallela diametro G H, quæ conjugata ſit diametro C F, per punctum C & centrum ductæ: dico aliam rectam in puncto C eandem Ellipſin non contingere.

Si enim fieri poteſt, contingat eandem quoque in puncto C recta I C K, diametroque L M, eidem I C K æquidiſtanti, altera conjugata ducatur N O, (quæ cum à priori

C F

CF diverſa ſit [1], punctum N cum puncto C non coïncidet,) ac per N ipſi LM, ideoque & contingenti ICK, æquidiſtans ducta ſit PQ. Cadet itaque [2] punctum C, adeoque recta ICK infra rectam PNQ: nimirum, versùs Ellipſeos centrum. At verò & eodem modo [3] punctum N, ideoque recta PNQ, infra contingentem ICK: nempe, versùs idem centrum cadet, quod repugnat. Non contingit ergo ICK Ellipſin. Eadem de omnibus aliis eſt demonſtratio, ac proinde conſtat propoſitum.

[1] per 4 Cor. 14 hujus.
[2] per 2 Cor. 13 hujus.
[3] per idem Coroll.

Corollarium.

Conſtat itaque [4] in Ellipſi cuilibet tangenti parallelas, æquidiſtantes quoque eſſe diametro conjugatæ ei, quæ per tactum & centrum ducitur; ac proinde & ad diametrum per tactum ductam ordinatim applicari, atque ab illa bifariam dividi [5], & contra, quæ per cujuſcunque diametri terminum ducitur æquidiſtans cuilibet rectæ, per eandem diametrum bifariam ſectæ, Ellipſin in eodem vertice contingere.

[4] per Coroll. præcedens.
[5] per 4 Cor. 13 hujus.

THEOREMA XVI.

Propoſitio 18.

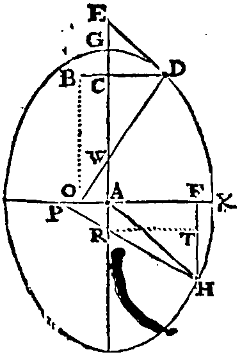
Si quælibet contingens productæ Ellipſeos diametro cuicunque occurrat, atque à puncto contactus ad eandem diametrum recta ordinatim applicetur: erit rectangulum ſub diametri portionibus, à centro per contingentem applicatamque abſciſſis, ſemidiametri quadrato æquale, & contra.

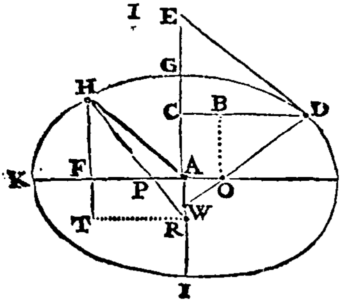
Quamcunque Ellipſin GD, cujus centrum A, contingat in puncto D, utcunque ſumpto, recta DE, diametro IG occurrens in E; atque à puncto contactus D ad eandem diametrum ordinatim applicata ſit DC: dico rectangulum CAE quadrato ſemidiametri AG æquale eſſe.

Sit enim primùm axis diameter IG, ſitque OW *deſcribens*, in ſtatione uti fuit, cùm per eandem deſcriptum eſt punctum D; ita ut OD *intervallum* ſemi-axi AG æquale ſit, PR autem *deſcribens* in ſtatione, ipſi OW reciprocâ; ita ut à curvæ puncto H, quod

nempe

nempe *deſcribenti* P R in directum eſt, ducta diameter H A conjugata ſit ei, quæ per D & A duceretur [1], ideoque & contingenti D E parallela [2]. Sitque porrò ad ſecundum axem A K applicata H F, ducanturque O B, R T ipſis A G, A K æquidiſtantes, quæ applicatis D C, H F, productis, ſi opus fuerit, occurrant in B & T.





Itaque cum ſimilia ſint triangula O A W & R A P [3], erunt quoque triangula W C D & R T H, nec non O B D & P F H [4] ſimilia. At verò & latera W D & R H, nec non O D & P H [5] æqualia ſunt. Quare & latera W C & R T ſive A F, nec non D B, & H F [6] æqualia erunt. Sunt autem porrò [7] triangula E D C & H A F [8] æquiangula; unde ex antedictis erit [8] D C ad C W ſive A F, id eſt [9], E C ad H F ſive D B, uti eadem D B ad B O [10]. Unde cum proportionales ſint E C, D B, B O, erit [11] ut E C ad B O ſive C A, ita D B quadratum ad B O quadratum; & componendo [12], ut E A ad C A, ita [13] D O quadratum ad B O quadratum, hoc eſt, G A quadratum ad C A quadratum; ac proinde [14] & rectæ E A, G A, C A proportionales erunt, ideoque [15] rectangulum C A E quadrato ſemi-axis A G æquale. Cumque in puncto D alia recta præter ipſam D E Ellipſin contingere non poſſit [16], patet converſum quoque verum eſſe: nimirum, ſi rectangulum C A E æquale ſit quadrato ſemi-axis A G, & per C ordinatim applicata Ellipſi ocrurrat in D, junctam E D eſſe contingentem.

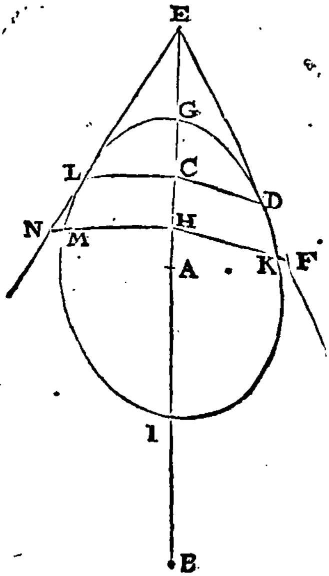
Deinde non ſit recta I G Ellipſeos G D axis, ſed alia diameter quæcunque, cujus parameter I B, atque ab aſſumpto in curva

1 per 4 Cor. 14 hujus.
2 per Cor. 17 hujus.
3 ex conſtructione.
4 per 29 primi, & 21 ſexti.
5 ex conſtructione.
6 per 26 primi.
7 per 29 primi.
8 per 4 ſexti.
9 propter triangula E D C, H F A *æquiang.*
10 propter triangula D C W, D B O *æquiangula.*
11 per Cor. 20 ſexti.
12 per 18 quinti.
13 per 47 primi.
14 per Cor. 20 ſexti.
15 per 17 ſexti.
16 per 17 hujus.

 utcun-

utcunque puncto D ad eandem diametrum ordinatim applicetur D C, ſitque quadrato ſemidiametri A G æquale rectangulum C A E: dico junctam E D, productamque, totam extra Ellipſin cadere, ideoque eandem in puncto D contingere, & converſim.

Sit enim in eadem E D, aut in ipſa producta, prout libuerit, aſſumptum utcunque punctum F, ſitque per F ducta recta F H ipſi C D æquidiſtans, quæ dictæ diametro I G occurrat in H, Ellipſi verò G D in K. (Etenim ſi Ellipſi non occurreret, manifeſtiſſimè punctum F extra Ellipſin foret.) Deinde I G ut axe, eâdemque parametro I B intelligatur deſcripta alia Ellipſis G L, ac per C & H ad eundem axem ordinatim applicentur C L, H M, quæ curvæ occurrant in L & M, jungaturque E L, (quæ utique Ellipſin G L in L continget[1],) eaque producta, ſi opus fuerit, productæ H M occurrat in N.



[1] per ſup. demonſtr.

Itaque quoniam eſt quadratum D C ad rectangulum G C I, ut quadratum L C ad idem G C I rectangulum, (quippe utriuſque eadem eſt ratio, quæ parametri I B ad diametrum ſive axem I G[2]:) erunt[3] quadrata D C, L C, ideoque & rectæ D C, L C æquales. Eodem modo, & rectas K H, M H æquales eſſe, demonſtrabitur. At verò cum ſit C D ad H F, ut C L ad H N, (ſiquidem[4] utriuſque eadem eſt ratio, quæ rectæ E C ad rectam E H,) erunt quoque[5] H F & H N æquales. Eſt autem H N major applicatâ H M, cum contingens ſit E L N: ergo & H F applicatâ H K major erit, ideoque punctum F, in recta E D F utcunque ſumptum, hoc eſt, tota E D F, extra Ellipſin, G D cadet, ſive, quod idem eſt, eandem in puncto D continget. Cumque non poſſit præter E D F alia recta eandem Ellipſin in puncto D contingere[6], manifeſtum quoque eſt converſum: ſi nempe E D Ellipſin G D in

[2] per 13 hujus, & Cor. 20. ſexti.
[3] per 9 quinti.
[4] per 4 ſexti.
[5] per 14 quinti.
[6] per 17 hujus.

in D. contingat, diametroque G I occurrat in E, & ad eandem diametrum ordinatim applicata ſit D C, rectangulum C A E quadrato ſemidiametri A G æquale eſſe.

Corollarium.

Ex dictis perſpicuum eſt, quo pacto à dato quolibet puncto ducenda ſit recta, quæ Ellipſin contingat.

Si enim datum punctum in ipſa curva ſit, veluti D: jam ſupra [1] oſtenſum eſt, quo pacto per dictum punctum contingens ducatur. Quod tamen & hoc quoque modo per præcedens Theorema perficietur.

Ductâ ex D ad inventam [2] diametrum G I rectâ ordinatim D C, fiat rectangulum C A E quadrato ſemidiametri A G æquale, jungatur recta E D.

At ſi extra Ellipſin ſit datum punctum, ut E: ductâ ad A centrum [3] rectâ E A, quæ Ellipſin ſecet in G, quadrato A G æquale fiat rectangulum E A C; ac per C ductâ ordinatim applicatâ C D: nimirum, quæ [4] æquidiſtet contingenti quæ per G duceretur [5], occuratque Ellipſi in D, jungatur E D: eritque hæc ipſa tam priori quàm poſteriori caſu [6] contingens quæſita.

A puncto autem intra Ellipſin dato non poſſe duci rectam, quæ eandem contingat, manifeſtiſſimum eſt.

[1] *in Cor. 16. hujus.*
[2] *per 2 Cor. 15. hujus.*
[3] *inventum per 2 Coroll. 15 hujus.*
[4] *juxta Cor. 17. hujus.*
[5] *per præcedentia, aut 5 Coroll. 14. hujus.*
[6] *per 18 hujus.*

Atque ita me compendioſè viâ ſatis planâ ac maximè naturali, abſque ulla ſolidi conſideratione, Elementa proprietateſque præcipuas Curvarum, quas Veteres *Coni ſectiones* appellavêre, tradidiſſe confido. E quibus principiis cætera omnia, quæ ad Parabolam, Hyperbolam, vel Ellipſin pertinent, abſque ulteriori manuductione facillimè deducet, quicunque animum iis debitè applicuerit, atque in Geometricis per ſe ad ulteriora progredi valeat. Adeò ut eâdem tractandi methodo hiſce diutiùs inhærere ſupervacuum putem, præſertim cum inſignis & ſublimior quædam ſcientia ſuperſit, cui Veteres enixiſſimè incubuiſſe ex quorundam relatu ac nonnullis antiquorum Geometrarum fragmentis manifeſtum eſt; quæque tam ab iiſdem

quàm à Recentioribus *Locorum Inventio* ſive *Compoſitio* appellata fuit. Ad quam promovendam, ab Apollonio cæteriſque Geometris ea præcipuè conſcripta eſſe, quæ in Conicorum tractatione prædictis Elementis ſuperaddidere, omnino credibile eſt. Cumque penitiorem curvarum linearum notitiam perfectamque earum enumerationem ac diſtinctionem, ut & diſtributionem in ſua genera & ſpecies, cum ſegregatione earum, quæ verè Geometricæ non ſunt, ab iis quæ in Geometriam ſunt recipiendæ, ex accurata *Loci* tractatione imprimis petendam exiſtimem: è re fore duxi, eandem tractationem hîc ſubjungere, non quidem eâ methodo, ſicut à Veteribus inchoata videtur, cum vix integrum & ingens volumen eidem ſufficeret, ni vel tantùm *Locorum*, quæ *Plana*, ac *Solida* (quamvis, meo judicio, minùs rectè,) vocârunt, id eſt, quæ vel *recta linea*, vel *Parabola*, vel *Hyperbola*, vel *Ellipſis*, ſive *circuli circumferentia* exiſtunt, (quorumque Locorum Compoſitioni eos ſolummodo intentos fuiſſe invenimus,) doctrinam exactè complecteretur, atque id porrò volumen in immenſum excreſceret, ſi ad Loca, quæ ſunt lineæ curvæ ſecundi generis, uti nobis propoſitum eſt, extenderetur; ſed Arte Analyticâ per Æquationum examen & præcepta generalia, quibus omnes omnino caſus poſſibiles reſolvantur ac determinentur. In quibus pertractandis eum ordinem ſumus obſervaturi, ut jam poſt explicationem Elementorum Parabolæ, Hyperbolæ, & Ellipſis, (ſuppoſitâ notitiâ eorum, quæ ad linearum rectarum, angulorum, & figurarum rectilinearum, nec non Circulorum naturam pertinent) inventionem ac determinationem tradamus eorum *locorum*, quæ vel rectæ lineæ ſunt vel ex prædictis curvis conſtant; (Illa autem & nobis, ne quid temerè mute-
mus.

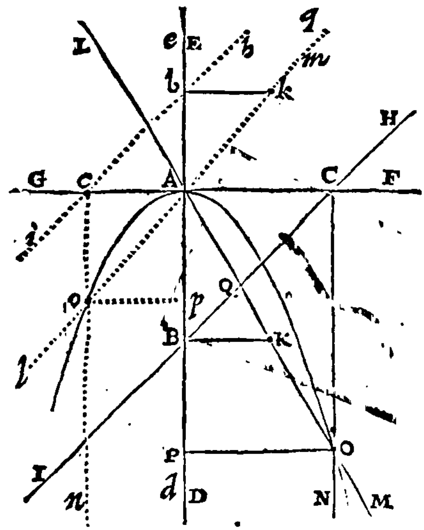
mus, *Locorum Planorum*, *Solidorumque* nomine venient) atque eo ipſo oſtendamus in primo curvarum genere, præter Circulum, non niſi Parabolam, Hyperbolam, & Ellipſin eſſe recipiendas. Tractationi autem ulteriorum locorum, quæ pertinent ad lineas curvas ſecundi generis, ſimiliter quoque earundem curvarum Elementa præmittemus. Cum verò ad ipſarum generationem viam ſternant non tantùm deſcriptiones linearum curvarum primi generis, hoc libro propoſitæ atque explicatæ, ſed & multi alii illas in plano deſcribendi modi: operæ pretium duximus eorundem modorum, qui certè infiniti ſunt, ut quilibet huic ſpeculationi intentus facilè experietur, vel illos ſaltem hîc adjungere, quos aut ad deſcriptiones curvarum ſecundi generis auxilio nobis fore, aut Mechanicæ curvarum primi generis in plano delineationi præcedentibus aptiores judicamus.

CAPUT IV.

Alia Parabolam, Hyperbolam, & Ellipſin in plano delineandi Methodus.

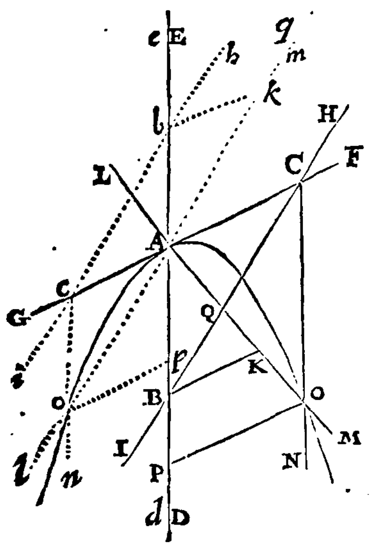
Sit triangulum quodcunque iſoſceles A B C, & tam æqualia crura A B, A C, quàm baſis B C utrinque indefinitè producantur, ut ad D, E, & F, G, nec non H I; ſitque ab alterutro angulorum ad baſin ducta quævis recta terminata, oppoſito cruri æquidiſtans, ut B K, & per terminum ejuſdem K altera recta, utrinque indefinitè extenſa, liberè tranſeat, quæ circa verticem anguli reliqui, nempe punctum A, ut Polum, circulariter mobilis ſit, veluti L A K M; ac denique rectæ F G inſiſtens C N ipſi D E parallela tranſeat per ipſarum F G & H I interſectionem C. Dico, ſi angulus E B H atque ipſi ad verticem D B I cum recta B K moveatur in utramque partem, ita tamen ut crus A B ſemper applicatum maneat rectæ D E, ſimulque recta H I huc atque illuc promoveat rectam C N, ſibi ipſi ſemper æquidiſtan-

tem, ac recta B K ad polum A circulariter moveri faciat prædictam L M, per punctum K ſemper tranſeuntem, interſectionem ipſarum C N, L M, quæ fit ad O, Parabolam deſcribere, cujus diameter eſt A D, parameter K B, ac F G eandem contingens in vertice A.



In quacunque enim ſtatione conſtitutus fuerit angulus E B H ſeu D E I, ſi interſectio rectarum F G, H I deſignetur per C, atque ab interſectionis puncto O ad diametrum applicata ſit O P ipſi F G æquidiſtans: erit ſemper K B ad B A, hoc eſt, ad A C, uti eadem A C ad C O[1]: ac proinde [2] rectangulum ſub K B, C O, id eſt [3], ſub K B, A P quadrato rectæ A C, hoc eſt [4], ipſius O P æquale. Unde ſi B A C angulus rectus fuerit, erit A D axis, ſin minùs, diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciunt angulos ipſi B A C vel B A G angulo æquales.

1 per 29 primi, & 4 ſexti.
2 per 17 ſexti.
3 per 34 primi.
4 per eandem.



In tranſitu etiam hîc notandum eſt, eodem illo motu per interſectionem ipſarum H I, L M, puta Q, Hyperbolam ſive op-

poſitas

poſitas Hyperbolas deſcribi; ut &, quamvis triangulum B A C iſoſceles non foret, nec etiam recta B K ex angulari puncto B ſed ubivis in recta A D educta eſſet, nihilominus tamen curvam A O Parabolam fore; at verò nec parametrum priori, nec verticem, nec diametrum poſteriori caſu eaſdem remanere, quas tamen illis quoque caſibus determinare facillimum eſt.

Quoniam autem circa finem capitis primi monuimus, curvam, juxta definitiones in principio ejuſdem capitis propoſitas, quâlibet *efficiente*; & quocunque *intervallo* deſcriptam, ſi *anguli mobiles* inæquales ſint *iis qui ad directricem* ſunt ab eadem parte, Hyperbolam eſſe, idque Mechanicæ ejuſdem in plano delineationi non inutile judicamus: idcirco id demonſtratione jam comprobandum duximus, ſimul oſtenſuri, quo pacto eadem Methodus ad prædictas Hyperbolarum delineationes commodè applicetur.

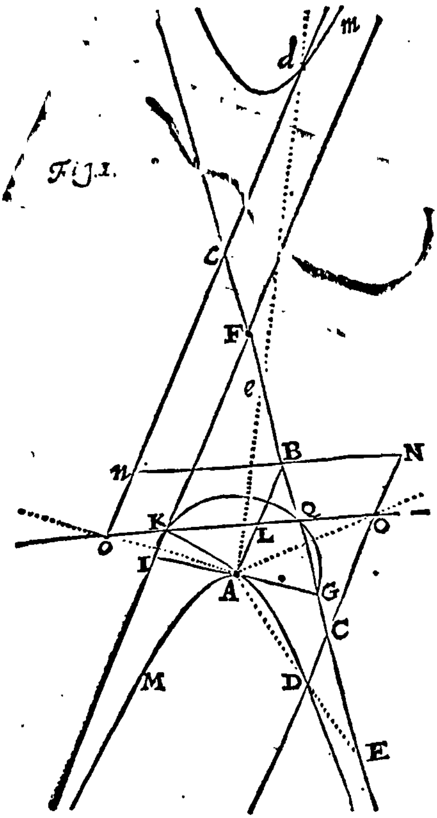
Sit itaque *efficiente* I G, *intervallo* A L, & *directrice* K L O, angulis autem I A L & K L A inæqualibus, deſcripta curva D A M: dico eandem curvam Hyperbolam eſſe; ac ſi ductâ à *Polo* A ad *directricem* rectâ A K, ita ut angulus L A K angulo L A G æqualis ſit, centro A & intervallo A K circulus deſcribatur, ſecans *efficientem* in I & G, ad *directricem* in K & Q [a], perque puncta I & K, nec non per G & Q ducantur rectæ I K, G Q, ſibi mutuò occurrentes in F, rectas F I, F G Aſymptotos eſſe [b].

Sumpto enim in curva puncto utcunque, veluti D, applicetur tam *angulus mobilis*, ut O A D, quàm *deſcribens*, ut O D, in ſtatione uti fuêre, cùm per eas deſcriptum eſt punctum D. Quoniam igitur æquales ſunt anguli A I K, A K I inter ſe [1], nec non ſimul ſumpti angulo K A G, (quippe tam poſterior quàm priores [2] cum angulo I A K binos rectos conſtituunt): erunt quoque anguli A I K ſeu A I F & G A L, utpote æqualium dimidia, inter ſe æquales, ac propterea [3] rectæ I K F & A L parallelæ [c]; ideoque ſicut I K F rectæ F G occurrit, ita & eidem F G occurrent

[a] aut eandem in K contingens, uti in caſu fig. V. exhibito. [b] ſi verò dictorum punctorum bina coïncidant velut I & K in III, ac G & Q in IV. fig. tangat ibidem circulum recta, ut I F in priori, & G F in poſteriori cum contingere cernitur. [1] *per 5 primi.* [2] *per 13 & 32 primi.* [3] *per 28 primi.* [c] in caſu fig. III, quoniam uterque angulorum A I F & G A L rectus eſt, rectæ I F, A B parallelæ erunt.

rent deſcribentes AL & OD, utpote ipſi IKF æquidiſtantes. Sint itaque ipſarum occurſus in B & C, ac per B agatur recta BN directrici KO æquidiſtans, occurrensque deſcribenti DO in N: eritque ut GA ipſi AI, ita [1] GB ipſi BF æqualis. Cum

[1] per 2 ſexti, & 14 quinti.



autem in triangulis LAK, OQC æquales ſint anguli ad L & O, (propter [2] AL, CO parallelas,) ſitque & angulus LAK ſive GAL, id eſt, GIF, æqualis angulo OQC, (quippe tam hic quàm ille cum angulo KQG, vel KQE duos rectos conſtituit

[2] per 29 primi.

tuit [1],) [d] æquiangula erunt eadem triangula L A K & O Q C [1] ſive [2] N B C. Porrò, quoniam angulus A G E angulo I K O ſeu A L O æqualis eſt, (quippe tam hîc quàm ille cum angulo I G Q ſive I G F [3] binos rectos conſtituit [e],) atque angulis L A G, O A D vel O A E iiſdem ſive æqualibus addito vel ablato communi O A G [f], compoſiti vel reſidui L A O, G A D vel G A E æquales quoque ſunt, ac L O, A O ſibi mutuò occurrant; G E quoque & A D ſibi mutuò occurrant neceſſe eſt; ſit itaque ipſarum occurſus E punctum; & æquiangula erunt triangula, A G E, A L O, eritque propterea [4] A L ad A G, ut L O ſive N B ad G E. At verò

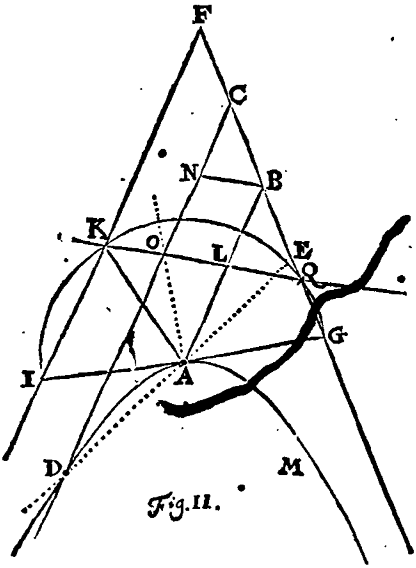


Fig. II.

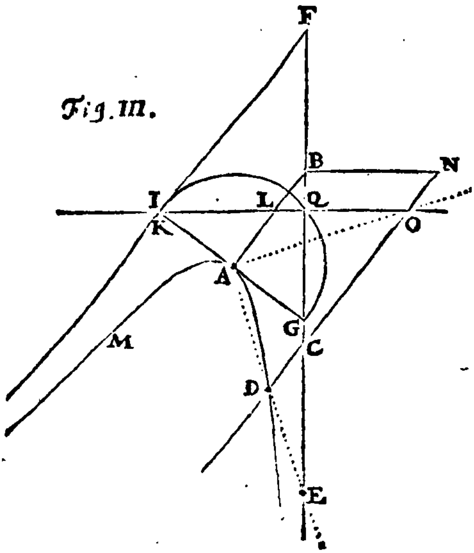


Fig. III.

[1] *in I & II fig. per 13 primi, & 22 tertii. in IV per 13 primi, & 18 ac 31 tertii.*

[d] in caſu fig. III apparet, tam angulum O Q C quàm L A K rectum eſſe, per 13 primi, & 31 tertii: ac in fig. V & VI angulos G I F & O Q C æquales, per 32 tertii & 21 ejuſdem.

[2] *per 29 primi.*

[3] *in fig. I, per 13 primi & 22 tertii, in fig. III, per 13 primi & 31 tertii; in fig. IV per 13 primi, 18 & 31 tertii; in fig. V per 13 primi & 32 tertii; in fig. VI, per 13 primi, quoniam angulo I G Q æqualis eſt I K Q per 21 tertii.*

[e] in fig. II angulus A G E angulo A L O eſt æqualis, quia uterque cum angulo I K Q duos rectos conſtituit, per 29 primi & 22 tertii.

[f] vel, in caſu fig. II & ſimilibus, B A E.

[4] *per 4 ſexti permut.*

1 per ſup. dem. 2 per 4 ſexti. 3 per 11 quinti. 4 per 9 quinti. 5 per ſup. demonſtr.

(ob triangula LAK & NBC [1] ſimilia) eſt quoque [2] eadem AL ad AK; hoc eſt, ad eandem AG, ut NB ad BC. unde per conſequens erit [3], ut NB ad GE, ita eadem NB ad BC. ac proinde [4] rectæ GE & BC, ideoque & GB ſeu [5] FB & CE, nec non BE & FC æquales erunt. Denique cum, propter triangula

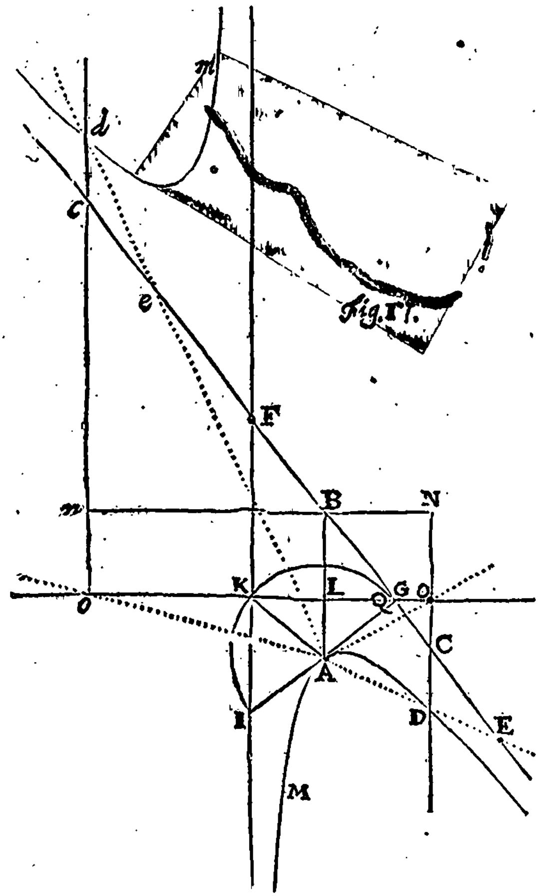


Fig. 11.

6 per 29 primi. 7 per 4 ſexti. 8 per ſup. demonſtr. 9 per 16 ſexti.

ABE & DCE [6] ſimilia, [7] BE ſit ad CE, hoc eſt [8], FC ad FB, ut BA ad CD: erit [9] rectangulum FCD ſub extremis æquale rectangulo FBA ſub mediis. Quod cum ſemper accidat, ubi-

ubicunque in curva aſſumptum fuerit D punctum; ſequitur [1] curvam D A M Hyperbolam eſſe, cujus Aſymptoti F I, F G. Quod erat oſtendendum. [1] per 3 hujus.

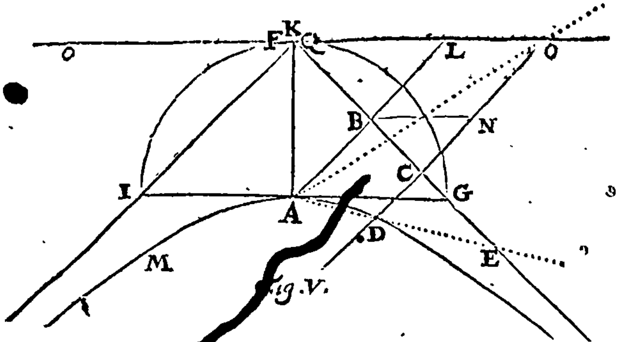


Fig.V.

Ex antedictis manifeſtum eſt, ſi *efficiens* ſeu [2] contingens, ut I G, ad Aſymptotorum alterutram perpendicularis ſit, veluti in tertia & quarta figura, vel *angulos mobiles* L A I & L A G rectos fore, ſi nempe *intervallum*, ut A L, æquidiſtans ductum ſit ei Aſymptoto cui *efficiens* ſeu contingens I G ad angulos rectos occur- [2] per 6 hujus.

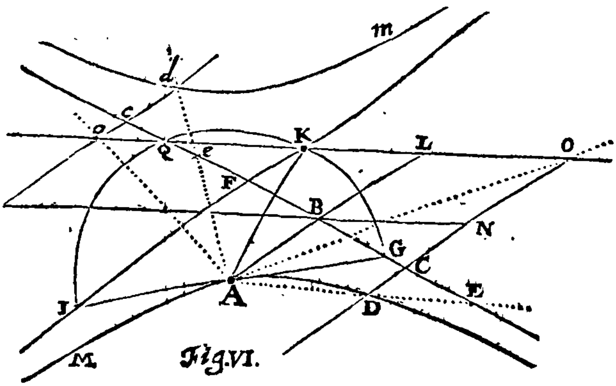


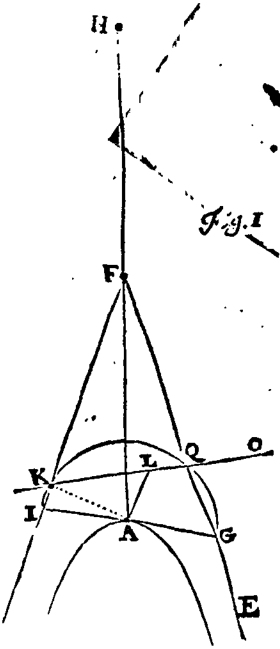
Fig.VI.

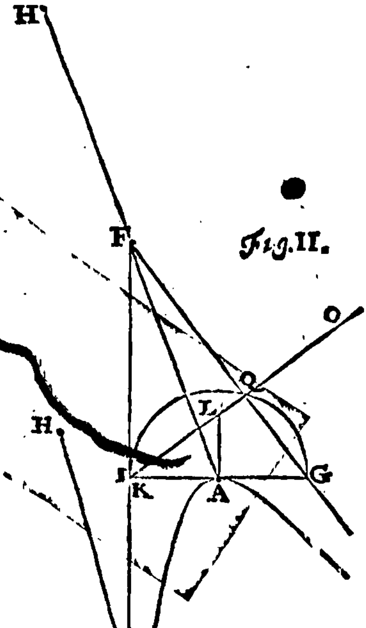
rit, ut in tertia figura, vel certè *deſcribentem* ad *directricem* fore perpendicularem, ſi nempe *intervallum* parallelum fuerit ei Aſympto, cui eadem *efficiens* ſeu contingens G I occurrit ad angulos obliquos; ut in quarta figura.

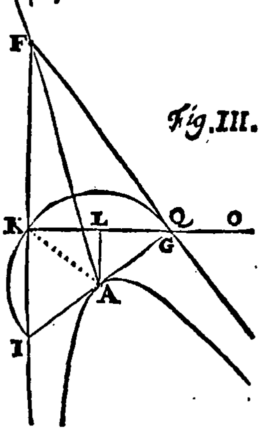
Itaque ſi vel Aſymptotis F I, F G, & contingente I G; vel dia-

 metris

metris conjugatis H A, I G, Hyperbola ſit deſcribenda, ductis in caſu poſteriore Aſymptotis F I, F G, diametro I G circulus deſcribatur, qui ſecet utramque Aſymptoton, puta







in K & Q [a], ductâque per K & Q rectâ K O, cui ducta A L, Aſymptotorum alterutri, ut F I, æquidiſtans, occurrat in L: faciliimè colligitur ex præmiſſis, ſi *efficiente* I G, *intervallo* A L, ac *directrice* K O, curva deſcribatur, eandem fore Hyperbolam, quæ delineanda proponitur.

[a] aut alteram tangat, & alteram ſecet, ut in II fig. fit in I & Q, ac in III fig. in G & K.

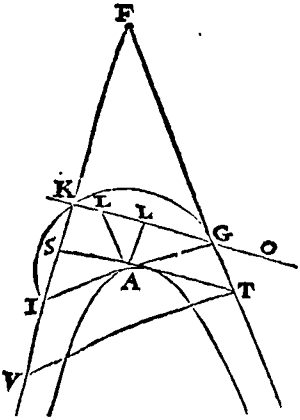
Nonnunquam tamen, ut obliquos circumferentiæ & rectarum occurſus evitemus, hæc eadem abſque Circuli deſcriptione efficere expediet.

Ita-

Itaque ſi, ductâ A L Aſymptotorum alterutri, ut F I, parallelâ, ad eandem Aſymptoton ducatur A K, ita ut L A K angulus angulo L A G æqualis ſit, & per K recta K O ſecans prædictam A L in L, ita ut angulus F K O angulo F G I æqualis ſit: erit curva, *efficiente* I G, *intervallo* A L, ac *directrice* K O deſcripta, ea ipſa Hyperbola, quæ quæritur.

Ad Mechanicas porrò Hyperbolarum deſcriptiones non inutile fore judicavimus paucis hîc oſtendere; quo pacto vel *angulis mobilibus* rectis, vel ita ut *deſcribens* ad *directricem* ſit perpendicularis, quælibet Hyperbolæ in plano delineari queant.

Si itaque vel hoc, vel illo modo deſcribenda ſit in plano Hyperbola, cujus Aſymptoti ſint F S, F T, quamque contingat recta S T, ùtrinque Aſymptotis terminata: Ductâ ab alterutro punctorum S vel T rectâ, vel ad hanc, vel ad illam Aſymptoton perpendiculari, uti T V, quam ad F T angulos rectos efficere ſupponimus, eidem T V per punctum I (nempe ita ſumtum ut I F inter V F & S F media ſit proportionalis) agatur æquidiſtans I G, quæ continget quoque Hyperbolam quæſitam [1], propterea quòd ſit V F ad I F, hoc eſt [2], I F ad S F, uti [3] T F ad G F. Ideoque deſcripto ſuper eandem I G circulo I K G, qui tangat Aſymptoton F T in G [4], atque alteram ſecet in K, ſi per K & G ducatur recta K G O, eidemque occurrat ducta ab A, puncto medio tangentis I G, recta A L in L, quæ quidem A L vel ad eandem I G, vel ad ductam K O ſit perpendicularis: erit Hyperbola, quæ *efficiente* I G, *directrice* K O, atque *intervallo* A L, ad eandem *efficientem*, dictamvè *directricem* perpendiculari, deſcribitur, juxta ea quæ modò expoſita ſunt, hæc ipſa, quæ delineanda proponitur.



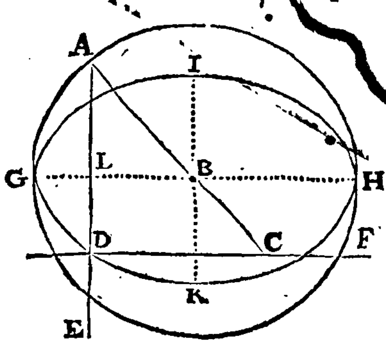
1 per 9 hujus.
2 ex hypotheſi.
3 per 2 ſexti, & componendo per 18 quinti.
4 per Cor. 16 tertii.

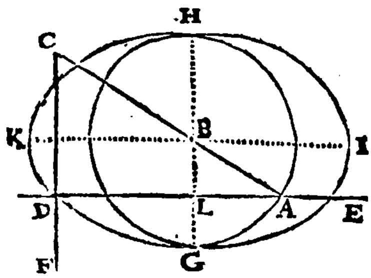
Similiter & vel datis quibuſlibet *angulis mobilibus*, vel ita

ita ut *deſcribens* ad *directricem* datos quoſlibet angulos efficiat quamcunque Hyperbolam in plano delineare haud difficile erit.

Cæterùm ſequentem quoque Ellipſin in plano deſcribendi rationem hîc adjeciſſe ſuum aliquando uſum habebit.

Recta linea, ut A B C, ad Polum B circulariter mota binis ſui punctis A & C, in eadem utcunque aſſumptis (ſive B ſit inter A & C, ſive C ſit inter A & B,) promoveat rectas A D E, D C F, ſibi ipſis ſemper æquidiſtantes, ac ſe invicem ad rectos angulos interſecantes: dico curvam, quæ continuâ earundem interſectione, veluti D, deſcribitur, Ellipſin eſſe, cujus centrum eſt B, & axes G B H, I B K, nempe magnitudine ipſarum A B, B C duplæ, poſitione verò ipſis A D E, D C F, æquidiſtantes per B Polum ductæ, atque ibidem bifariam diviſæ.





Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, applicentur ipſi *deſcribentes* A D E, D C F in ſtatione uti fuêre, cùm per illarum interſectionem deſcriptum eſt punctum D; noteturque porrò punctum, ubi earum alterutra, veluti A D E, vel hanc vel illam ductarum G H, I K, ex. gr., ipſam G H, ſecat, ut in L. & ſit G A H circumferentia Circuli, qui per motum puncti A deſcribitur. Quoniam itaque eſt [1] A B quadratum ad B C quadratum, hoc eſt, G B quadratum ad B K quadratum, ut A L quadratum ſive [2] G L H rectangulum ad L D qua-

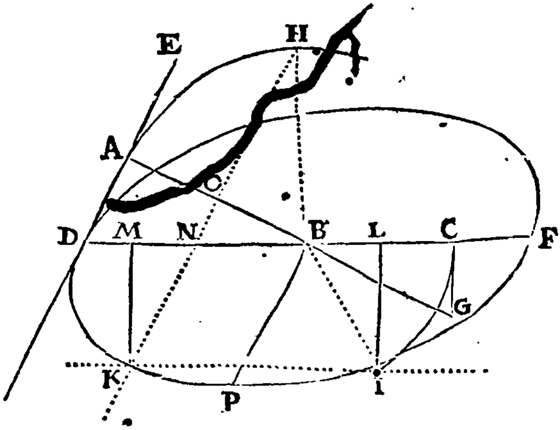
[1] *per 2 & 22 ſexti.*
[2] *per 14 ſecundi, vel 35 tertii.*

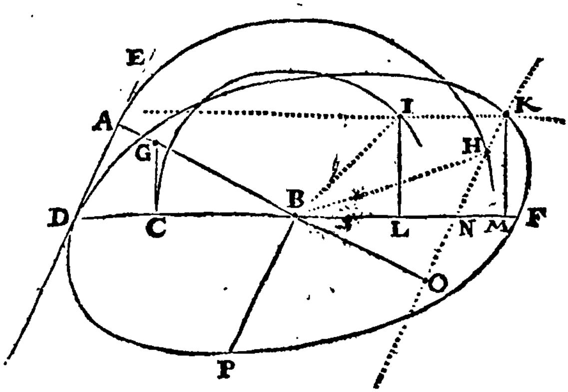
quadratum: conſtat[1], curvam G K H, uti prædictum eſt, deſcriptam Ellipſin eſſe, cujus axes ſunt G H, I K.

[1] per 13 hujus.

Manifeſtum autem eſt, ſi puncta A & C æqualiter à B Polo diſtent, prædictam curvam Circuli circumferentiam fore.

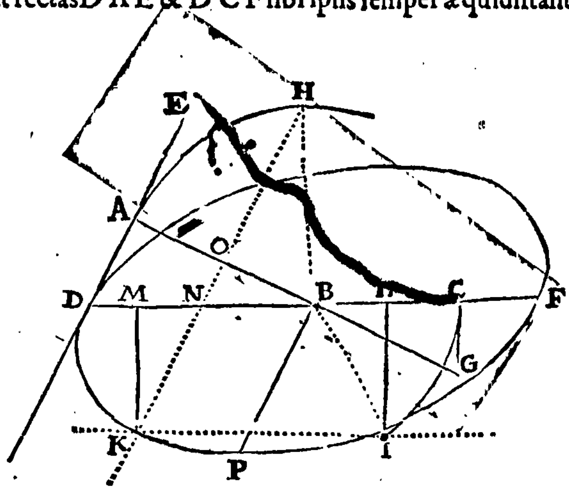
Non ſit deinde A B C una linea recta, ſed angulus quicunque, ſive obtuſus, ſive acutus A B C, ſintque prædictæ rectæ D A E,





D C F in punctis A & C ita junctæ, ut, cùm earum altera uni cruri

cruri coincidat, (quemadmodum in ſtatione A B C recta D C F coincidit cruri B C,) altera ad reliquum crus ſit perpendicularis, (ſicut in eadem ſtatione recta D A E ad crus A B perpendicularis eſt:) dico iterum, ſi angulus A B C circa Polum B circulariter motis punctis A & C in utroque crure utcunque aſſumptis promoveat rectas D A E & D C F ſibi ipſis ſemper æquidiſtantes, cur-



vam, continuâ ipſarum interſectione, veluti D vel K, deſcriptam, Ellipſin eſſe, cujus ſemi-diametri magnitudine ſunt rectæ D B, B G, nempe dictorum crurum, ſi opùs fuerit, productorum, portiones à perpendicularibus A D, C G, per aſſumpta puncta A & C reciprocè ductis, ad Polum interceptæ; & quidem altera, uti D B, etiam poſitione; altera verò, ut B G, non item, ſed B P ipſi æqualis, rectæque D A E æquidiſtans.

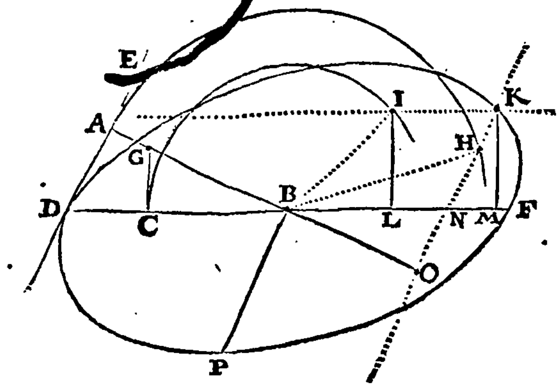
Sit enim prædictus A B C angulus in alia ſtatione utcunque, ex. gr., in H B I; ideoque præfata interſectio ad K. Demiſſis autem ab I & K ad rectam D F, ipſius D B duplam, perpendicularibus I L, K M, notatiſque interſectionem punctis ad N & O, quoniam æquales ſive iidem ſunt angulus A B C ſive O B L & H B I, erunt quoque, addito vel ablato communi H B F, anguli H B O & I B L æquales; ideoque triangula H B O & I B L, ob angulos præterea ad O & L rectos [1], æquiangula. Sunt autem [2] &

1 ex hypotheſi, & per 29 primi.
2 per 21 ſexti.

& æquiangula triangula C B G & M N K, cum tam hoc quàm illud triangulo O B N ſimile ſit[1]: quare cum ſit [2] D B quadratum ad N B quadratum, ut A B quadratum, id eſt[3], H B quadratum, ad O B quadratum, erit[4] per converſionem rationis D B quadratum ad D N F[5] rectangulum, ſicut H B quadratum ad H O[6] quadratum, id eſt[7], uti B I quadratum ad I L quadratum, vel uti B C quadratum ad K M quadratum[8], id eſt[9], uti B G ſive B P quadratum ad K N quadratum, & permutando [10] D B quadratum ad

[1] ob angulos ad C, O, & M rectos, ad B verò & N ſive eoſdem ſive ad verticem.

[2] per 4 & 22 ſexti. [3] ex hypotheſi. [4] per Cor. 19 quinti. [5] per 5 ſecundi. [6] per 47 primi. [7] per 4 & 22 ſexti. [8] æqualis eſt enim B C ipſi B I, & I L ipſi K M. [9] per 4 ſexti, propter triangula C B G & M K N æquiangula. [10] per 16 quinti.



B P quadratum, ut D N F rectangulum ad K N quadratum. Ac proinde Ellipſis eſt curva D K P F, interſectione uti prædictum eſt deſcripta [11], cujus ſemi-diametri conjugatæ D B, B P; ideoque B centrum, ac D A E contingens Ellipſin in vertice D [12].

[11] per 13 hujus.

[12] per 2 Cor. 13 hujus.

Notandum hîc eſt, quòd ſi rectus foret A B C angulus, interſectione, uti prædictum eſt, non curvam, ſed rectam lineam deſcribi.

Quemadmodum autem Ellipſin, quæ ſuperiùs per motum puncti in una eademque recta deſcripta fuit, nunc per duarum rectarum interſectionem delineavimus,

mus, ita & Parabola Hyperbolaque, quarum generationes ſolummodo per ſimiles interſectiones in præcedentibus expoſuimus, per motum puncti in una eademque recta deſcribi poſſunt. At verò quoniam prædictarum curvarum generationes, ut jam ante quoque monuimus, infinitæ ſunt, atque earum facillimas quidem ac maximè naturales à nobis jam propoſitas exiſtimamus, hiſce diutiùs inhærendum non videtur; itaque ad *Locorum Planorum Solidorumque* inventiones ac determinationes progrediamur.

IOHANNIS DE WITT ELEMENTA CVRVARVM LINEARVM.

LIBER SECVNDVS.

CAPVT I.

PROPOSITIO GENERALIS.

IN omni quæſtione, ubi indagandus proponitur Locus, ſive is ſit ad lineam rectam, ſive ad curvam, ſuppoſitis duabus lineis rectis incognitis atque indeterminatis, datum vel aſſumptum angulum comprehendentibus, tanquam cognitis ac determinatis, devenitur ad Æquationem, aſſumptum quodlibet quæſiti Loci punctum determinantem; in qua quidem æquatione, poſtquam ad ſimpliciſſimos terminos erit reducta, ſi neutra incognitarum ad duas pluresve dimenſiones aſſurgat, hoc eſt, ſi neque in ſe, neque in alteram incognitam ducta ſeu multiplicata reperiatur, quæſitus Locus erit linea recta: At ſi earundem incognitarum altera ad quadratum aſcendat, altera verò non item, ſed neque in ſe, neque in alteram incognitam ducta ſit, erit Locus quæſitus Parabola. Quòd ſi verò utraque ad quadratum aſcendat, ſive altera in alteram ducta in æquatione reperiatur (altiùs enim æquatio non aſſurget, ſi de loco Plano Solidovè quæſtio ſit): erit Locus quæſitus vel Hyperbola, vel Ellipſis, vel Circuli circumferentia.

 Quo-

Quorum quidem omnium particularis determinatio, deſcriptio, & demonſtratio variis modis fieri poteſt; at verò ex ſimpliciſſimis, generaliſſimisque aliquem annotaſſe ſuffecerit.

Ac primo quidem caſu, cùm neutra quantitatum incognitarum ad duas pluresve dimenſiones aſcendit, ſi earum una exprimatur per x, atque altera per y, poteſt æquatio ad aliquam ſequentium formularum reduci.

I. $y \propto \frac{bx}{a}$, ſive (poſito $a \propto b$) $y \propto x$.

II. $y \propto \frac{bx}{a} + c$; ſive, poſito, ut ſupra, $y \propto x + c$.

III. $y \propto \frac{bx}{a} - c$, ſive $y \propto x - c$.

IV. $y \propto - \frac{bx}{a} + c$, ſive $y \propto - x + c$.

Fiat autem earundem quantitatum incognitarum ſecundùm regulam talis aſſumptio, ut initium unius, verbi gratiâ, ipſius x, certum ſit & immutabile, utque eadem illa quantitas ex certo & immutabili illo initio in linea recta poſitione data intelligatur indefinitè extendi, altera verò indeterminatæ quoque longitudinis linea priori in extremitate incerta in dato vel aſſumpto angulo conjungi. Quibus quidem ſuppoſitis, ea, quæ prædicta ſunt, ſequentibus Theorematis non incongruè proponi, determinari, ac demonſtrari poſſe videntur.

THEOREMA I.

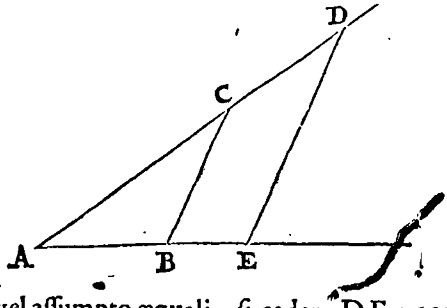
Propoſitio I.

Si æquatio ſit $y \propto \frac{bx}{a}$, erit locus quæſitus linea recta.

Sit enim ipſius x initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam A B indefinitè ſe extendere intelligatur. Dein, ſumpto in eadem A B puncto utcunque, veluti B, agatur B C in

angulo

angulo A B C, ipſi dato vel aſſumpto æquali; ita ut eadem ſit ratio interceptæ A B ad ductam B C, quæ eſt a cognitæ ad b cognitam.



hoc eſt, ut ſit uti a ad b, ita A B ad B C. Denique per puncta A & C ducatur recta A C, indefinitè extenſa, eritque hæc ipſa locus quæſitus.

Etenim aſſumpto in A C puncto utcunque, veluti D, ductâque D E in angulo D E A, dato vel aſſumpto æquali, ſi eadem D E vocetur y, erit [1] ut A B ad B C, hoc eſt, ut a ad b, ita A E ad E D, hoc eſt, ita x ad y. Et ſit [2] $ay \infty bx$, hoc eſt, dividendo utrinque per a, erit $y \infty \frac{bx}{a}$.

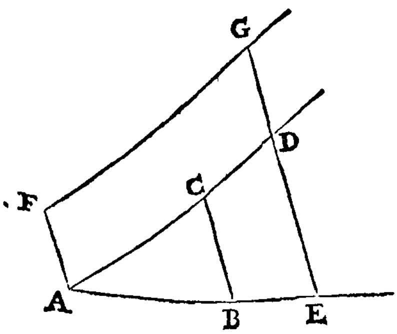
[1] per 29 primi, & 4 ſexti.
[2] per 16 ſexti.

Quare cum punctum D utcunque ſumptum ſit in linea A C, erit eadem de omnibus aliis lineæ A C punctis demonſtratio, ac proinde ipſa A C locus eſt quæſitus. Atque ita non ſolùm Theorematis propoſiti veritas demonſtrata, ſed & Locus quæſitus determinatus eſt.

THEOREMA II.

Propoſitio 2.

Si æquatio ſit $y \infty \frac{bx}{a} + c$, erit Locus quæſitus linea recta.



Poſitis, factisque, ut ſupra, agatur inſuper ex A recta A F ipſi B C parallela, atque ad eaſdem cum ea partes, quæ ſit æqualis c cognitæ. Et ex F ductâ F G parallelâ A C, dico eandem F G eſſe Locum quæſitum.

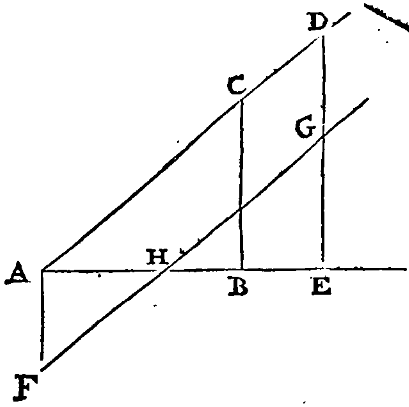
Sumpto enim in F G puncto utcunque, veluti G, ductâque GE in angulo AEG, dato

dato vel aſſumpto æquali, quæ ſecet rectam A C in D, ſi eadem
(1 per 29 primi, & 4 ſexti.) G E vocetur y, erit E D ∞ $y - c$. At verò eſt, ut ſupra [1], uti A B
ad B C, ita A E ad E D, hoc eſt, ut a ad b, ita x ad $y - c$: ac pro-
(2 per 16 ſexti.) pterea [2] $ay - ac \infty bx$, vel $ay \infty bx + ac$, adeoque, factâ divi-
ſione per a, $y \infty \frac{bx}{a} + c$. Quod demonſtrandum determinan-
dumque erat.

THEOREMA III.

Propoſitio 3.

Si æquatio ſit $y \infty \frac{bx}{a} - c$, erit Locus quæſitus linea recta.



Poſitis factiſque ut in Theoremate 1mo, agatur inſuper ex A recta A F, ipſi B G parallela, atque ad oppoſitas cum ea partes, quæ ſit æqualis c cognitæ. Et ex F ductâ iterum F G ipſi A C parallelâ, ſecante rectam A B in H, dico H G eſſe Locum quæſitum.

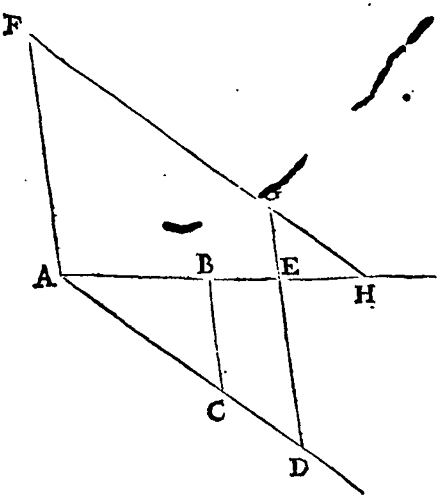
Sumpto enim in eadem puncto utcunque veluti G, ductâque G E in angulo A E G, dato vel aſſumpto æquali, quæ producta ſecet A C
(3 per 29 primi, & 4 ſexti.) in D, ſi eadem G E vocetur y, erit E D ∞ $a + c$. Iam verò eſt [3]
ex conſtructione, ut A B ad B C, ita A E ad E D, hoc eſt, ut a ad
(4 per 16 ſexti.) b, ita x ad $y + c$: ac propterea [4] $ay + ac \infty bx$, vel $ay \infty bx - ac$,
adeoque, factâ diviſione per a, $y \infty \frac{bx}{a} - c$. Quod eſt propoſitum.

THEO-

THEOREMA IV.

Propoſitio 4.

Si æquatio ſit $y \infty c - \frac{bx}{a}$, erit Locus quæſitus linea recta.



Poſitis, factiſque, ut in Theoremate 2do, excepto quòd punctum C ab oppoſita parte ipſius AB cadat, quodque angulus A B C æqualis ſit dati vel aſſumpti anguli ad binos rectos complemento, quemadmodum in adjuncta figura apparet, agatur ex F recta F G ipſi A C parallela, occurrens rectæ A B in H: dico F H eſſe Locum quæſitum.

Sumpto enim in FH puncto utcunque, veluti G, ductâque G E in angulo A E G, dato vel aſſumpto æquali, quæ producta ſecet A C in D, ſi eadem G E vocetur y, erit E D ∞ $c - y$. Cumque ſit [1] ex conſtructione, ut A B ad B C, ita A E ad E D, hoc eſt, ut a ad b, ita x ad $c - y$: erit propterea [2] $ac - ay \infty bx$, vel $ay \infty ac - bx$, id eſt, dividendo utrinque per a, $y \infty c - \frac{bx}{a}$. Quod erat propoſitum.

[1] *per* 13 & 29 *primi*, & 4 *ſexti*.
[2] *per* 16 *ſexti*.

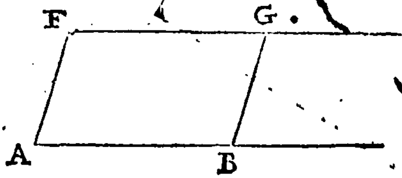
At verò fieri etiam poteſt, ut per operationem, priuſquam ad æquationem deveniatur, quantitatum incognitarum altera penitus evaneſcat, alteraque ſola alicui cognitæ quantitati æqualis remaneat; atque exin-

exinde binæ inſuper formulæ naſcuntur, quæ huc referri debent: nimirum,

1. y ∞ c, vel
2. x ∞ c.

THEOREMA V.
Propoſitio 5.

Si æquatio ſit y ∞ c, Locus quæſitus eſt linea recta.

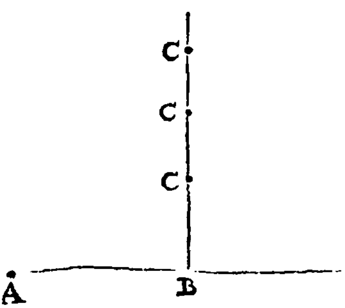


Sit quantitatis x, quæ per operationem evanuit, initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam A B indefinitè ſe extendere intelligatur. Deinde ex A ductâ A F ∞ c, faciente cum A B angulum, ipſi dato vel aſſumpto aut ejuſdem ad binos rectos ſupplemento æqualem, ſi ex F agatur F G ipſi A B parallela, dico eandem F G eſſe Locum quæſitum.

Etenim aſſumpto in F G puncto utcunque, veluti G, ductâque G B ipſi A F parallelâ, apparet eandem G B omneſque ipſi æqui-
¹ per 34 primi. diſtantes ¹ rectæ A F fore æquales, hoc eſt, eſſe y ∞ c. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA VI.
Propoſitio 6.

Si æquatio ſit x ∞ c, erit Locus quæſitus linea recta.



In linea A B, quæ, ut ſupra, pro x concepta ſit, ſumatur à puncto A longitudo A B æqualis c cognitæ, atque ex B in dato vel aſſumpto angulo ducatur recta B C. dico eandem B C, indefinitè productam, eſſe Locum quæſitum.

Sumpto enim in eadem puncto

cto utcunque, veluti C, erit ex hypotheſi C B cum priore A B comprehendens angulum A B C dato vel aſſumpto æqualem, poteritque proinde eadem C B vocari y. At verò eſt ex conſtructione, & remanet ſemper A B, hoc eſt, $x \infty c$. Quod eſt propoſitum.

CAPUT II.

PОrrò ſecundo caſu, ſupra expreſſo, cùm nempe in æquatione, ad ſimpliciſſimos terminos reductâ, quantitatum incognitarum altera ad quadratum aſcendit, altera verò non item, ſed neque in ſe, neque in alteram quantitatem incognitam ducta reperitur: poterit æquatio ad aliquam ſequentium formularum reduci.

I.	$yy \infty ax$	vel converſim	$ay \infty xx$
II.	$yy \infty ax + bb$		$ay + bb \infty xx$
III.	$yy \infty ax - bb$		$ay - bb \infty xx$
IV.	$yy \infty - ax + bb$		$bb - ay \infty xx.$

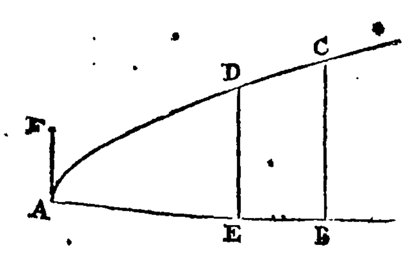
Supponendo y & x eſſe quantitates incognitas, vel ab initio conceptas, vel poſtmodum aſſumptas, ut mox latiùs explicabitur.

THEOREMA VII.

Propoſitio 7.

Si æquatio ſit $yy \infty ax$, vel converſim $ay \infty xx$: erit Locus quæſitus Parabola.

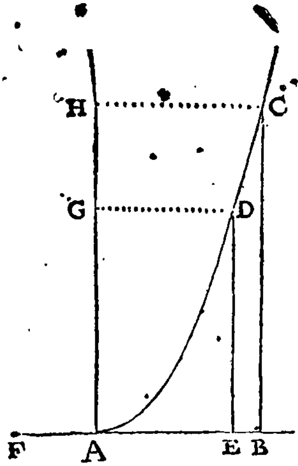
Sit ipſius x initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam A B indefinitè ſe extendere intelligatur, & ſit datus vel aſſumptus angulus æqualis angulo A B C; Aſſumatur primò eadem A B ut Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant cum ipſa angulos æquales dato vel aſſumpto angulo A B C, cujusque latus rectum A F



1 per 10 Coroll. primi, & 4 Coroll. ſecundi hujus. ſit æquale a cognitæ. Dico Parabolam A D C, quæ [1] per prædictæ diametri verticem A deſcripta ſit, habeatque latus rectum eidem diametro correſpondens ∞ a, eſſe Locum quæſitum.

Sit enim in eadem curva A D C aſſumptum punctum utcunque, veluti D, ductâque D E in angulo A E D dato vel aſſumpto æquali, ſi ipſa D E vocetur y, erit, ex natura Paraboles [2] quadratum ex E D ∞ F A E rectangulo, hoc eſt, yy ∞ ax. Quod erat propoſitum.

2 per 1 primi hujus.



Ad demonſtrationem autem ſecundæ hujus Theorematis partis iiſdem ut ſupra ſuppoſitis, ducenda eſt ex A puncto recta A H ipſi B C parallela, atque eadem A H aſſumenda pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel aſſumpto angulo A B C ſeu A H C æquales, ac cætera, ut ſupra, eritque Parabola A D C Locus quæſitus.

3 per 1 primi hujus. Eſt enim [3] quadratum ex G D ſive A E quadratum æquale rectangulo ſub F A & A G, ſeu F A & E D, id eſt, xx ∞ ay. Quod erat demonſtrandum.

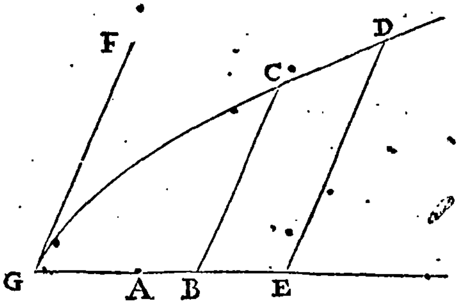
THEOREMA VIII.

Propoſitio 8.

Si æquatio ſit yy ∞ $ax + bb$ aut converſim $ay + bb$ ∞ xx, erit Locus quæſitus linea Parabolica.

Sit ipſius x initium immutabile A punctum, atque eadem illa x per rectam A B indefinitè ſe extendere intelligatur, ſitque angulus datus vel aſſumptus æqualis angulo A B C. Deinde producatur A B versùs A uſque ad G, ita ut ſit A G ∞ $\frac{bb}{a}$; aſſumptâque G B prò diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos æquales dato vel aſſumpto angulo A B C, cujusque latus rectum

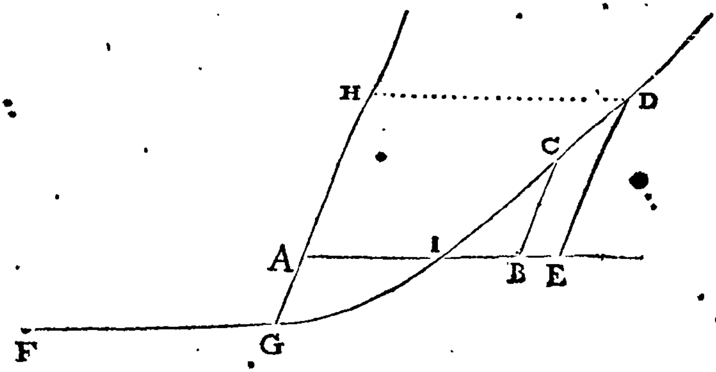
rectum G F ſit æqualem cognitæ: dico Parabolam G C D, quæ per prædictæ diametri verticem G deſcripta ſit, habeatque latus rectum eidem diametro correſpondens ∞ a, eſſe Locum quæſitum.



Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque D E in angulo A E D, dato vel aſſumpto æquali, ſi ipſa D E vocetur y, quoniam G E ſive A E + A G eſt ∞ $x + \frac{bb}{a}$, atque ex natura Paraboles [1] quadratum ex E D ∞ rectangulo ſub F G & G E, erit $yy \infty ax + bb$. Quod primò erat demonſtrandum.

[1] *per 1 primi hujus.*

Ad explicationem verò ſecundæ hujus Theorematis partis iiſdem ut ſupra poſitis, ducatur ex A recta A H ipſi B C parallela; eâdemque productâ versùs A uſque ad G, itâ ut A G ſit ∞ $\frac{bb}{a}$, dico, ſi ad G H diametrum latere recto G F ∞ a Parabola deſcribatur ut G C, quæ ſecet rectam A B in I, curvam I D eſſe Locum quæſitum.



Eſt enim [2] ex natura Paraboles rectangulum ſub F G & G H ton-

[2] *per 1 primi hujus.*

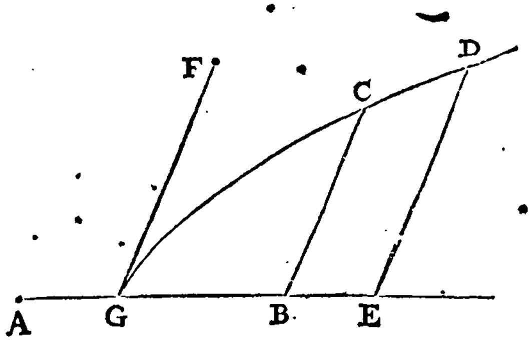
contentum æquale quadrato ex H D ſeu A E, ac proinde, quoniam G H, ſive D E + A G, $\infty\ y + \frac{bb}{a}$, atque F G $\infty\ a$, erit, factâ debitâ multiplicatione, $ay + bb \infty xx$. Quod eſt propoſitum.

THEOREMA IX.

Propoſitio 9.

Si æquatio ſit $yy \infty ax - bb$ aut converſim $ay - bb \infty xx$, erit Locus quæſitus linea Parabolica.

Suppoſitis iiſdem, quæ in præcedenti Theoremate, auferatur ab A B recta A G $\infty \frac{bb}{a}$, fiantque cætera, ut ibidem dictum eſt: dico curvam G C D eſſe Locum quæſitum.

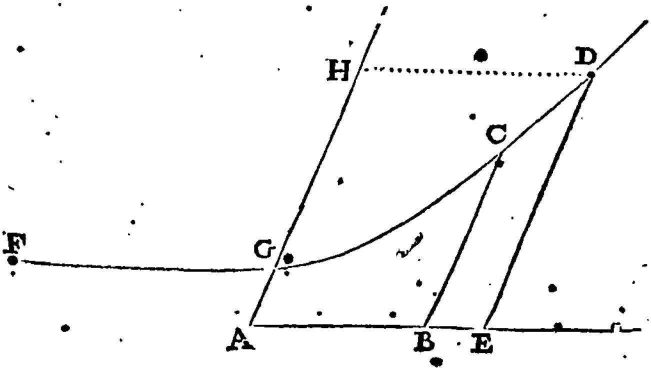


Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, demiſsâque D E ipſi C B parallelâ, ſi eadem D E vocetur y, erit ex natura Paraboles [*] quadratum ex E D ſeu yy æquale rectangulo ſub F G & G E, id eſt, producto ex a in $x - \frac{bb}{a}$, nimirum, $ax - bb$. Quod demonſtrandum determinandumque erat.

[*] per 1 primi hujus.

Ad explicationem autem ſecundæ hujus Theorematis partis, iiſdem ut ſupra poſitis, ducatur ex A recta A H ipſi B C parallela, atque ab ea ſubductâ A G $\infty \frac{bb}{a}$, ſumatur G H pro diametro, &c. ut ſupra, dico curvam G C D fore Locum quæſitum.

Eſt



Eſt enim [1] ex natura Paraboles rectangulum ſub F G & G H [1] contentum æquale quadrato ex H D ſeu A E, ideoque, quoniam G H ſive D E — A G æquatur $y - \frac{bb}{a}$, atque F G ∞ a, erit, factâ debitâ multiplicatione, $ay - bb \infty xx$. Quod erat propoſitum.

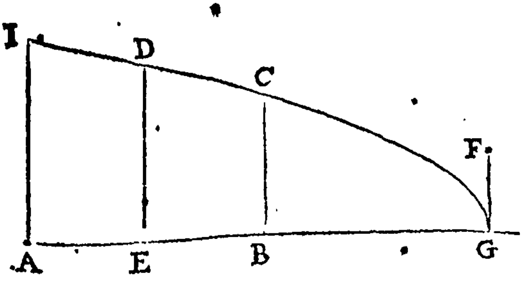
[1] per eandem.

THEOREMA X.

Propoſitio 10.

Si æquatio ſit $yy \infty bb - ax$ aut converſim $bb - ay \infty xx$, erit Locus quæſitus linea Parabolica.

Sit enim, ut ſupra, ipſius x initium immutabile A punctum, intelligaturque eadem x in recta A B indefinitè ſe ab A extendere versùs B; angulus. verò datus vel aſſumptus eſto æqualis angulo

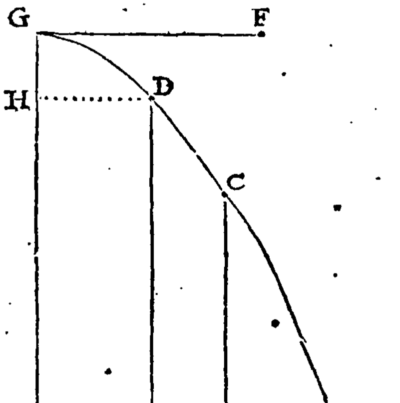


A B C. Deinde ab A versùs B aſſumptâ A G $\infty \frac{bb}{a}$ ſumatur G A pro

pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos æquales dato vel aſſumpto A B C, aut ejuſdem ad duos rectos ſupplemento. Quo facto, ſi per prædictæ diametri verticem G versùs A Parabola deſcribatur, cujus latus rectum G F eidem diametro correſpondens ſit ∞ a, quæque Parabola rectam A I ipſi B C parallelam ſecet in I: dico ejuſdem Parabolæ portionem, inter verticem G & punctum interſectionis I interceptam, nempe curvam G C I, eſſe Locum quæſitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, demiſsâque D E ipſi C B parallelâ, ſi eadem D E vocetur y, cum [1] ex natura Paraboles quadratum ipſius D E ſit æquale rectangulo ſub F G & G E, & G E ſive A G — A E ſit ∞ $\frac{bb}{a} - x$, ac F G ∞ a, factâ debitâ multiplicatione, erit yy ∞ $bb - ax$. Quod demonſtrandum determinandumque erat.

[1] per 1 primi hujus.



Ad explicationem autem ſecundæ hujus Theorematis partis, iiſdem ut ſupra poſitis, ex A ducatur A G ipſi B C parallela atque ∞ $\frac{bb}{a}$, aſſumaturque G A pro diametro, &c. per omnia, ut ſupra, excepto quòd punctum interſectionis I ſit in recta A E.

Cum enim ductâ D H ipſi A B parallelâ [2] ex natura Paraboles rectangulum ſub F G & G H contentum ſit æquale quadrato ex H D ſeu A E, ſitque G H ſive A G — E D ∞ $\frac{bb}{a} - y$, atque F G ∞ a, factâ multiplicatione, ut decet, erit $bb - ay$ ∞ xx. Quod erat propoſitum.

[2] per eandem.

Regula

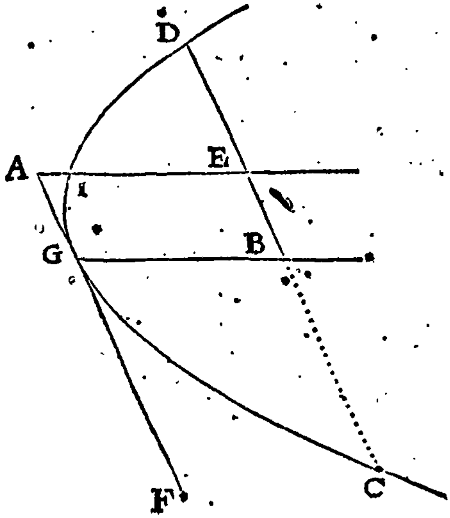
Regula univerſalis, moduſque reducendi omnes æquationes, quæ ex convenienti operatione producuntur, cùm Locus quæſitus eſt Parabola, ad aliquem quatuor caſuum, præcedentibus totidem Theorematibus jam explicatorum.

Si contingat ut quantitas incognita, quæ in æquatione ad duas dimenſiones aſcendit, in eadem quoque inveniatur unius dimenſionis, cum alia, ſive cognita, ſive incognita quantitate, vel etiam cum utraque planum aliquod faciens, loco ejuſdem aſſumenda eſt alia, vel ipſam excedens, vel ab ea deficiens dimidio quantitatis, quacum illa planum, uti dictum eſt, conſtituere reperitur, pro diverſa dicti plani ſigno + vel — affectione. Quo opere ipſa æquatio ad aliquem quatuor præcedentium caſuum reducetur, ita ut ei convenientem lineam Parabolicam determinare, per ea quæ ſuperiùs ſunt explicata, haud difficile ſit.

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis VII.

Si æquatio ſit $yy + 2ay \infty bx - aa$; aſſumpto, juxta Regulam, $z \infty y + a$, erit $z - a \infty y$. Hinc ſi ubique in æquatione loco ipſius y ſubſtituatur $z - a$, ejuſdemque quadratum loco yy: habebitur $zz - 2az + aa, + 2az - 2aa \infty bx - aa$, hoc eſt, omiſſis iis quæ ſeſe mutuò tollunt, erit $zz \infty bx$. Vnde ſtatim apparet, æquationem eſſe reductam ad formulam Theorematis VII, ac proinde Locum quæſitum eſſe Parabolam. Ad cujus ſpecificam determinationem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile A punctum, eademque x intelligatur ſe ab A per rectam AE indefinitè extendere; ſitque datus vel aſſumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAF. Deinde, quoniam z eſt $\infty y + a$, ſi y ſupra lineam AE exſurgere intelligatur, ducenda eſt infra eam recta GB ipſi AE parallela,

ita ut pars rectæ AF, omniumque ipſi parallelarum, intercepta inter AE & GB, veluti AG, æquetur a cognitæ. Porrò prædictâ GB aſſumenda eſt ut Parabolæ diameter, ad quam ſi per ejuſdem verticem G, exiſtente GF latere recto, ipſi diametro GB correſpondente, $\infty\ b$ Parabola deſcribatur, ſecans rectam AE in I: dico curvam ID indefinitè versùs D productam eſſe Locum quæſitum.



Etenim aſſumpto in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipſi AF parallelâ, ſi eadem DE vocetur y, producaturque donec prædictæ diametro GB occurrat in B: erit ex conſtructione intercepta EB $\infty\ a$, ac proinde tota DB $\infty\ y + a$, hoc eſt, z. Quare cum ex natura Paraboles quadratum ex DB æquetur rectangulo ſub FG & GB, vel FG & AE: erit quoque $zz \infty bx$, ſive, reſtituto $y + a$ loco z, $yy + 2ay + aa \infty bx$, id eſt, $yy + 2ay \infty bx - aa$. Quod demonſtrandum determinandumque erat.

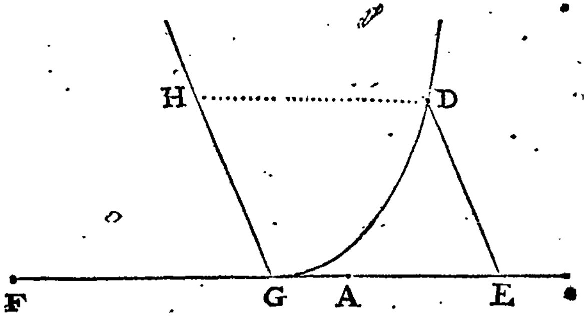
Quòd ſi æquatio fuiſſet $yy - 2ay \infty bx - aa$, factâ aſſumptione ſecundùm Regulam, atque operatione, ut ſupra; deventum fuiſſet ad eandem æquationem, nimirùm, $zz \infty bx$. Sed quoniam z eo caſu juxta Regulam aſſumenda fuiſſet $\infty\ y - a$, idcirco quoque diameter GB (iiſdem ut ſupra poſitis) non infra, ſed ſupra rectam AE cecidiſſet, cæteraque omnia eodem quo ſupra modo expedienda fuiſſent.

Si verò æquatio ſit $by - aa \infty xx + 2ax$, quæ eſt converſa ſuperiùs expoſitæ, aſſumpto juxta Regulam $v \infty x + a$, erit $v - a \infty x$. Quare ſi loco ipſius x in æquatione ſubſtituatur $v - a$, atque

hujus

hujus quadratum loco xx: erit $by - aa \propto vv - 2av + aa$, $+ 2av - 2aa$, hoc eſt, omiſſis iis, quæ ſe mutuò tollunt, erit $by \propto vv$.

Vnde ſtatim apparet, reductam eſſe æquationem ad formulam prædicti Theorematis ſeptimi converſim, ac proinde Locum quæſitum eſſe Parabolam. Ad cujus ſpecificam determinationem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile punctum A,

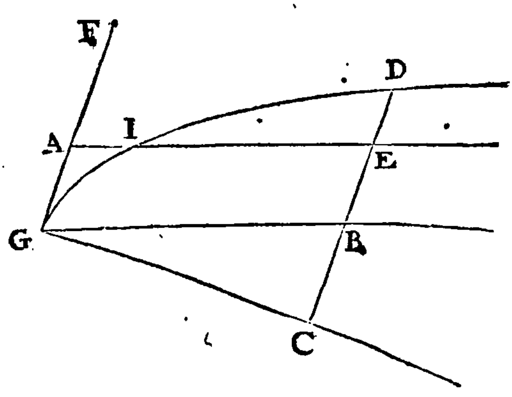


intelligaturque eadem x à prædicto puncto A per rectam A E indefinitè ſe extendere, ſitque datus vel aſſumptus angulus, quem comprehendunt y & x, æqualis angulo A G H vel F G H. Deinde, quoniam v æquatur $x + a$, producenda eſt recta A E versùs A uſque ad G, ita ut A G ſit $\propto a$; & ex G ducenda eſt G H, faciens angulum E G H vel F G H dato vel aſſumpto angulo æqualem, ipſaque G H ſumenda eſt pro Parabolæ diametro, ad quam ſi per ejus verticem G atque latere recto F G $\propto b$ Parabola deſcribatur, ut G D: dico curvam G D eſſe Locum quæſitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipſi H G parallelâ, ſi eadem D E vocetur y, cum G E ſit $\propto x + a$ ſeu v, atque ex natura Paraboles F G H rectangulum $\propto$ quadrato ex H D ſive G E, erit $by \propto vv$, ſive, reſtituto $x + a$ loco v, $by \propto xx + 2ax + aa$, ſeu $by - aa \propto xx + 2ax$. Quod determinandum, demonſtrandumque erat.

Quòd ſi æquatio fuiſſet $by - aa \propto xx - 2ax$, eadem per omnia mutatis mutandis ſecundùm Regulam inſtituenda fuiſſet operatio, cecidiſſetque eo caſu punctum G inter A & E.

Eodem modo ſi æquatio ſit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$, aſſumpto juxta Regulam $z \infty y + \frac{bx}{a} + c$: erit $y \infty z - \frac{bx}{a} - c$. Quo ſubſtituto in locum ipſius y, ejuſdemque quadrato loco yy, expunctiſque iis, quæ ſe invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis ſequentem formam induta erit ſuperior æquatio: $zz \infty \frac{2bc}{a} x + bx$, aut $zz \infty dx$, ſi loco $\frac{2bc}{a} + b$ ſubſtituatur d. Vnde iterum apparet, æquationem eſſe reductam ad formulam Theorematis VII, ac propterea Locum quæſitum eſſe Parabolam. Ad cujus ſpecificam determinationem eſto in ſequenti figura ipſius x initium immutabile punctum A, atque eadem x ab A puncto per rectam A E indefinitè ſe extendere intelligatur, ſitque datus vel aſſumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A F vel E A G. Deinde quoniam z eſt $\infty y + c + \frac{bx}{a}$, ſi y ſupra lineam A E exſurgere intelligatur, veluti E D, ducenda primùm eſt infra eandem recta G B ipſi parallela, ita ut partes rectæ F G omniumque ipſi æquidiſtantium inter prædictas A E & G B interceptæ, veluti A G, E B, æquentur c cognitæ.



Quo peracto, cum quævis recta, quæ poſſit eſſe y, ad rectam G B producta, ut, exempli gratiâ, D B, ſit $\infty y + c$, oportet ipſi adhuc adjungere $\frac{bx}{a}$, ut fiat æqualis z aſſumptæ. Quare, cum G B ſeu A E indefinitè ſumpta ſit ∞x, ſi ex G juxta I Theorema hujus libri infra eandem G B recta ducatur, ut G C; ita ut omnium ipſi G F parallelarum partes inter G B & G C interceptæ, veluti B C, ad partes ipſius G B inter G & dictas parallelas

rallelas interceptas, veluti B G, eandem rationem habeant, quæ eſt inter *b* & *a*. Quod ipſum ut fiat, ſtatuatur ut *a* ad *b*, ita G B ad B C: eritque B C ∞ $\frac{bx}{a}$. Eodem modo rectæ omnes ipſi B C parallelæ, quæ à G B ad G C ducuntur, erunt ∞ $\frac{bx}{a}$. Atque ita recta quælibet ſupra A E exſurgens, quæ poſſit eſſe *y*, poſtquam ad rectam G C erit producta, ut, exempli gratiâ, D C, erit ∞ $y + c + \frac{bx}{a}$ ſeu *z*. Hujus igitur quadratum cum debeat eſſe ∞ *d x*, ſtatim inde apparet, ſi Parabola deſcripta foret ad diametrum G C, cujus latus rectum G F ita eſſet aſſumptum, ut rectangula, ſub eodem latere recto & diametri portionibus, inter verticem & ordinatim applicatas interceptis, contenta, forent ∞ *d x*, eandem illam Parabolam fore Locum quæſitum. At verò cum ratio rectæ G B ad rectam B C, aliarumque ſimilium, cognita ſit, nempe, ut *a* ad *b*; ſitque itidem notus angulus G B C, ſub iiſdem comprehenſus, utpote æqualis dato vel aſſumpto E A F: erit propterea quoque [1] nota ratio G B ad G C, aliarumque ſimilium, quæ ſit ut *a* cognitæ ad *e* cognitam. Hinc cum G B ſeu A E indefinitè ſumpta exprimatur per *x*, erit G C itidem indefinitè ſumpta, hoc eſt, omnis diametri portio inter verticem & ordinatim applicatas intercepta ∞ $\frac{ex}{a}$. Quæ cum in latus rectum ducta producere debeat æquationis terminum *d x*, idem quoque æquationis terminus *d x* per $\frac{ex}{a}$ diviſus ut prædictum latus rectum reſtituat neceſſe eſt: ac proinde per eandem diviſionem cognoſcitur quæſitum latus rectum æquari $\frac{ad}{e}$. Sumptâ ergo G F ∞ $\frac{ad}{e}$ pro latere recto, ſi ad diametrum G C, ut ſupra dictum eſt, deſcribatur Parabola G I D, ſecans rectam A E in I: dico curvam I D fore Locum quæſitum.

[1] per 6 ſexti.

Atque hîc, ut & in aliis ſimilibus exemplis obiter notandum, ſi Parabola deſcripta prædictam A E non ſecaret, id certo indicio fore, quæſtionem propoſitam, per quam legitimâ operatione ad ſupra expreſſam æquationem perventum fuerit, ejus eſſe conditionis, ut Locus ad indagandum propoſitus ſui quidem naturâ

 linea

linea Parabolica exiſtat; ſed quòd nulla tamen quæſtioni ſatisfaciens deſcribi poſſit, cum propoſitæ quantitates, eo, ut petitur, modo, conjungi nequeant.

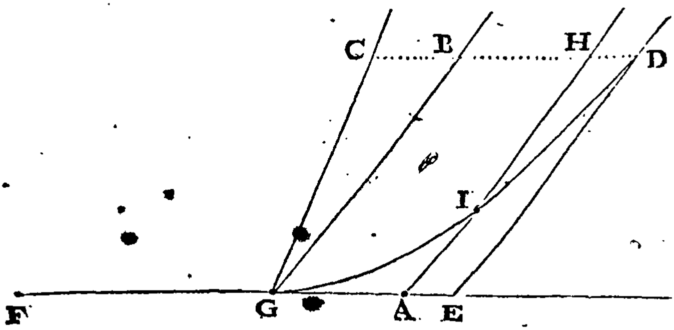
Ad demonſtrationem autem eorum, quæ ſupra dicta ſunt, ſumatur in curva I D punctum utcunque, veluti D, ductâque D E ipſi F G parallelâ, quæ protracta ſecet rectam G B in B, occurratque diametro G C in C, ſi D E vocetur y, cum E B ſeu A G ſit $\infty\ c$, & B C $\infty\ \frac{bx}{a}$, erit tota D C $\infty\ y+c+\frac{bx}{a}$, hoc eſt, z. Cumque ex natura Parabolæ quadratum ex D C ∞ F G C rectangulo, erit quoque ex antedictis $zz\ \infty\ dx$. Ac proinde ſubſtitutis aut reſtitutis $y+c+\frac{bx}{a}$ loco z, itemque $\frac{2bc}{a}+b$ in locum ipſius d, & ablatis quæ propter æqualitatem ſe invicem tollunt, ordinatisque omnibus, ut decet, erit $yy+\frac{2bxy}{a}+2cy\ \infty\ bx-\frac{bbxx}{aa}-cc$. Quod determinandum, demonſtrandumque erat.

Sin autem æquatio fuiſſet $yy-\frac{2bxy}{a}-2cy\ \infty\ bx-\frac{bbxx}{aa}-cc$, factâ aſſumptione ſecundùm Regulam atque operatione uti decet, ad eandem æquationem perventum fuiſſet; ſed quoniam z juxta aſſumptionem eo caſu faciendam fuiſſet æqualis $y-\frac{bx}{a}-c$, idcirco quoque ſuppoſitis, ut ante, rectâ G B non infra ſed ſupra rectam A E, ut & G C non infra ſed ſupra eandem G B ducenda fuiſſet, cæteraque omnia eodem quo ſupra modo fuiſſent expedienda.

Si verò æquatio ſit $by-\frac{bbyy}{aa}-cc\ \infty\ xx+\frac{2byx}{a}+2cx$, quæ eſt converſa ſuperiùs expoſitæ, aſſumpto juxta Regulam $v\ \infty\ x+\frac{by}{a}+c$, erit $x\ \infty\ v-\frac{by}{a}-c$. Vnde ſubſtituto hoc valore in locum ipſius x, ejuſdemque quadrato loco xx, expunctisque iis, quæ ſe invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis, ſuperior æquatio ſequenti formâ induta erit $\frac{2bc}{a}y+by\ \infty\ vv$, aut (ſi loco $\frac{2bc}{a}+b$ ſubſtituatur d) $dy\ \infty\ vv$. Id quod rurſus arguit æquationem propoſitam reductam eſſe ad formulam prædicti Theorematis VI. converſim, ac proinde Locum quæſitum eſſe Parabolam.

Ad

Ad cujus ſpecificam determinationem eſto in ſequenti figura ipſius x initium immutabile punctum A, atque eadem x à puncto A per rectam A E indefinitè ſe extendere intelligatur, ſitque da-



tus vel aſſumptus angulus E A H vel F A H. Deinde, quoniam ex ſecunda parte Theorematis V I.I conſtat, prædictam Parabolam ita eſſe deſcribendam, ut ordinatim applicatæ ad ejus diametrum ſint ipſi A E parallelæ, debeantque juxta æquationem propoſitam æquales eſſe quantitati aſſumptæ v, hoc eſt, $x + \frac{by}{a} + c$, ducenda primùm eſt recta G B ipſi A H parallela, ita ut pars rectæ E A, versùs A productæ, ut & omnium ipſi æquidiſtantium, velut A G vel H B ſit ∞ c cognitæ. Quo facto, cum quævis recta, quæ poſſit eſſe ipſi A E æquidiſtans & æqualis, ac proinde exprimi per x, ut, verbi gratiâ, D H, ad rectam G B producta; uti D B, æquetur $x + c$: ita porrò è puncto G ducenda, &, ſecundùm ea, quæ in præcedentibus explicata ſunt, conſtituenda eſt Parabolæ diameter ab adverſa parte ipſius G B, quàm eſt punctum E in recta G C, ut, ſi G B indefinitè vocetur y, B C, aliarumque omnium ipſi A E parallelarum inter eandem G C & rectam G B interceptæ partes exprimantur per $\frac{by}{a}$. Atque ita quælibet recta ipſi A E parallela, quæ poſſit eſſe x ad rectam G C producta, veluti D C, fit ∞ $x + c + \frac{by}{a}$, hoc eſt, v. Cujus quidem quadratum cum æquale eſſe debeat alteri æquationis termino, nempe, dy: ſtatim apparet, ſi Parabola deſcripta foret ad diametrum G C,

 cujus

cujus latus rectum G F ita eſſet aſſumptum, ut rectangula contenta ſub eodem latere recto & diametri portionibus, inter verticem G & ordinatim applicatas interceptis, forent ∞ dy, eandem illam Parabolam fore Locum quæſitum. At verò cum ratio rectæ G B ad rectam B C aliarumque ſimilium cognita ſit, nimirum, ut a ad b; ſitque itidem notus angulus ſub iiſdem comprehenſus, utpote æqualis dato vel aſſumpto E A H: erit quoque [1] ratio ipſius G B ad G C aliarumque ſimilium cognita, quæ ſit ut a cognitæ ad e cognitam. Quocirca ſi G B ſive E D indefinitè ſumpta exprimatur per y, erit G C itidem indefinitè ſumpta, hoc eſt, omnis diametri portio, inter verticem & ordinatim applicatas intercepta ∞ $\frac{ey}{a}$. Quæ cum in latus rectum ducta producere debeat æquationis terminum dy, idem quoque æquationis terminus dy per $\frac{ey}{a}$ diviſus ut prædictum latus rectum reſtituat neceſſe eſt. ac proinde factâ eâdem diviſione indicabit quotiens latus rectum quæſitum fore $\frac{ad}{e}$. Hinc, ſumptâ G F ∞ $\frac{ad}{e}$ pro latere recto, ſi ad diametrum G C inventam, ut ſupra dictum eſt, deſcribatur Parabola G I D, ſecans rectam A H in I: dico curvam I D fore Locum quæſitum.

[1] per 6 ſexti.

Sumpto enim in eadem puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipſi A H, ut & D C ipſi A E parallelâ, quæ quidem D C ſecet rectas A H & G B in punctis H & B, occurratque diametro G C in puncto C: erit A E ∞ x ∞ D H; E D ∞ y ∞ G B; A G & H B ∞ c; B C ∞ $\frac{by}{a}$ ideoque tota D C ∞ $x + c + \frac{by}{a}$, hoc eſt, v. Cumque ex natura Parabolæ rectangulum F G C ſit æquale quadrato D C: erit, factâ multiplicatione $\frac{ad}{e}$ in $\frac{ey}{a}$, atque v in ſe ipſam, dy ∞ vv. Et ſubſtitutis aut reſtitutis $x + c + \frac{by}{a}$ loco v, itemque $\frac{2bc}{a} + b$ in locum ipſius d, atque ablatis quæ propter æqualitatem ſe invicem tollunt, ordinatiſque omnibus, ut decet, $by - \frac{bbyy}{aa} - cc$ ∞ $xx + \frac{2byx}{a} + 2cx$. Quod determinandum, demonſtrandumque erat.

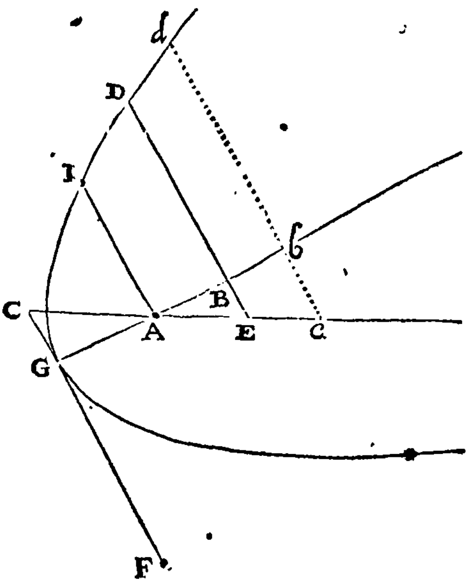
De cæteris autem caſibus, ad prædictam formulam ſpectantibus, ſupervacuum fuerit plura exponere, cum ex prædictis facilè

expli-

explicari, determinari, ac demonſtrari queant; obſervatâ ſolummodo diversâ linearum poſitione, quæ ex ſignorum + & — differentiâ oriri debet, cumque omnes ſimilium locorum caſus mox per generalem Regulam ſim exhibiturus.

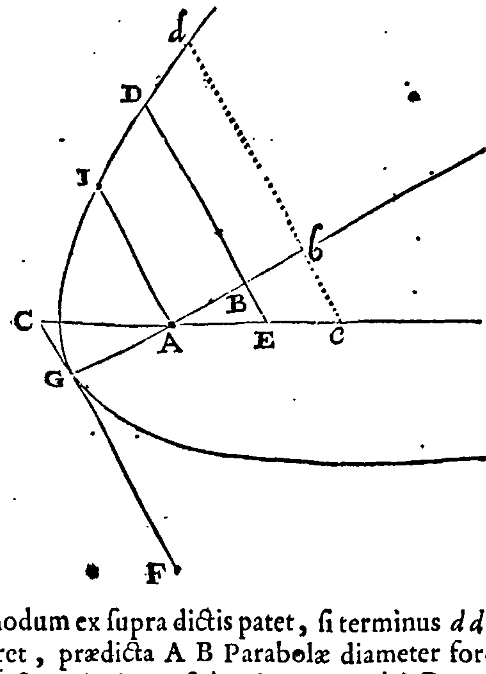
Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis VIII.

Si æquatio ſit $yy - \frac{bxy}{a} \infty - \frac{bbxx}{4aa} + bx + dd$, aſſumpto juxta Regulam $z \infty y - \frac{bx}{2a}$, erit $y \infty z + \frac{bx}{2a}$. quo ſubſtituto in locum ipſius y, & ejuſdem quadrato loco yy, omiſſisque iis, quæ ſe invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis, æquatio ſuperior ſequenti formâ erit induta: $zz \infty bx + dd$.



Vnde apparet, eandem eſſe reductam ad formulam Theorematis VIII, ac proinde Locum quæſitum eſſe Parabolam. Ad cujus particularem deſcriptionem eſto in adjuncta figura ipſius x initium immutabile punctum A, atque eadem x à dicto puncto A per

per rectam A E indefinitè ſe extendere intelligatur, ſitque datus vel aſſumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo A E D. Deinde, quoniam $z \infty y - \frac{bx}{2a}$, ſi y ſupra lineam A E exſurgere intelligatur, veluti E D, ducenda quoque eſt ſupra lineam A E ex puncto A recta A B, ita ut eadem ſit ratio A E ad E B, quæ eſt ipſius $2a$ cognitæ ad b cognitam, hoc eſt, ut ſit uti $2a$ ad b, ita A E ſeu x ad E B, eritque E B $\infty \frac{bx}{2a}$. idem intellige de omnibus aliis rectis ipſi E B parallelis, atque inter A E & A B interceptis, quæ quidem ſingulæ ipſi $\frac{bx}{2a}$ erunt æquales. Hinc,



quemadmodum ex ſupra dictis patet, ſi terminus dd in æquatione deficeret, prædicta A B Parabolæ diameter foret, ejuſque vertex punctum A, &, poſitâ ratione A E ad A B, ut $2a$ ad e, latus rectum ipſi correſpondens eſſet $\infty \frac{2ab}{e}$. Iam verò cum rectangulum, quod ſub latere recto & portione diametri, inter verticem atque ordinatim applicatas interceptâ, continetur, æquale eſſe debeat $bx + dd$: manifeſtum eſt, ſi, iiſdem poſitis, diameter

A B

A B verſùs A producatur ad G, ita ut rectangulum ſub prædicto latere recto & parte G A contentum ſit ∞ dd, rectam G B quæſitam fore diametrum, ejuſque verticem prædictum G punctum: ac proinde & dd per prædictum latus rectum, hoc eſt per $\frac{2ab}{e}$, diviſum æquari longitudini G A, ideoque G A fore ∞ $\frac{dde}{2ab}$. Quare ſi diametro G B & latere recto G F ∞ $\frac{2ab}{e}$ in dato angulo Parabola deſcribatur G D d, ſecans A I ipſi E D parallelam in I: dico curvam I D d fore Locum quæſitum.

Verùm obiter hìc quoque notandum venit, prædictum verticem G etiam inveniri hoc pacto: ſi nempe E A producatur ad C, ita ut A C ſit ∞ $\frac{dd}{b}$, ac deinde per punctum C ipſi D E parallela ducatur C G, occurrens productæ A B in G: erit enim in eodem illo concurſus puncto vertex quæſitus.

Demonſtratio.

Sumatur in prædicta curva punctum utcunque, veluti D, ductâque D E in angulo A E D, dato vel aſſumpto æquali, ſecante diametrum G B in B: erit, ex conſtructione, B E ∞ $\frac{bx}{2a}$; ideoque ſi E D vocetur y, erit D B ∞ $y - \frac{bx}{2a}$ ſeu z; F G ∞ $\frac{2ab}{e}$, G A ∞ $\frac{dde}{2ab}$; A B ∞ $\frac{ex}{2a}$, totaque G B ∞ $\frac{dde}{2ab} + \frac{ex}{2a}$. At cum ex proprietate Parabolæ D B quadratum ſit æquale rectangulo F G B, erit, factâ multiplicatione ipſius z in ſe ipſam, atque $\frac{2ab}{e}$ in $\frac{dde}{2ab} + \frac{ex}{2a}$, $zz \infty dd + bx$. Unde ſubſtituto $y - \frac{bx}{2a}$ loco z, obtinebitur $yy - \frac{bxy}{a} + \frac{bbxx}{4aa} \infty bx + dd$, id eſt, $yy - \frac{bxy}{a} \infty - \frac{bbxx}{4aa} + bx + dd$. Quod erat demonſtrandum.

Quomodo autem pro caſu hujus exempli converſo Parabola deſcribenda ſit, ex comparatione ejuſdem cum antedictis facile eſt colligere.

Si æquatio fuerit $\frac{bcy}{a} + by - \frac{bbyy}{aa} + \frac{1}{4}cc \infty xx + \frac{2byx}{a} - cx$, aſſum-

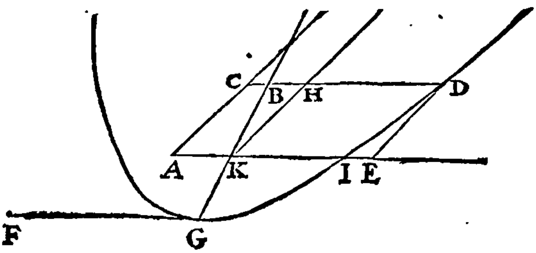
aſſumpto juxta Regulam $v \infty x + \frac{by}{a} - \frac{1}{2}c$, erit $x \infty v - \frac{by}{a} + \frac{1}{2}c$. quo ſubſtituto in locum ipſius x, ejuſdemque quadrato loco xx, ablatisque iis, quæ ſe invicem deſtruunt, atque omnibus ritè ordinatis, æquatio ſuperior ſequenti formâ erit induta.

$$by + \frac{1}{2}cc \infty vv.$$

Vnde apparet eandem eſſe reductam ad formulam prædicti Theorematis VIII converſim, ac proinde Locum quæſitum eſſe Parabolam. Cujus ſpecifica determinatio (ſuppoſitis, ut in adjuncta figura, A E indefinitè aſſumptam eſſe quantitatem incognitam x, atque cum altera y conſtituere angulum æqualem angulo E A C vel ejuſdem ad binos rectos ſupplemento) quoniam ex jam ante explicatis quaſi ſponte profluit, idcirco eam adjunctâ figurâ breviter indicaſſe ſuffecerit.

Determinatio Loci.

A E indefinitè ∞x.
E D omnesque ipſi parallelæ ∞y.
A K $\infty \frac{1}{2}c \infty$ C H, quia K H parallela A C.



Vt a ad b, ita K H ſeu y ad H B: unde H B fit $\infty \frac{by}{a}$, & D B $\infty x - \frac{1}{2}c + \frac{by}{a} \infty v$.

Vt a ad e, ita K H ſeu y ad K B: unde K B (in qua diameter) fit $\infty \frac{ey}{a}$.

by diviſum per $\frac{ey}{a}$, reddit $\frac{ab}{e}$: unde latus rectum F G fit $\infty \frac{ab}{e}$.

$\frac{1}{2}cc$, nempe terminus æquationis in totum cognitus, diviſus per $\frac{ab}{e}$

$\frac{ab}{c}$, nempe per latus rectum, reddit $\frac{cce}{2ab}$: undeK G fit $\infty\ \frac{cce}{2ab}$, atque G B $\infty\ \frac{cce}{2ab} + \frac{ey}{a}$.

Demonſtratio.

Rectangulum F G B ∞ B D quadrato, ergo $\frac{1}{2}cc + by \infty vv$, vel $by \infty vv - \frac{1}{2}cc$, hoc eſt, $by \infty xx + \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa} - cx - \frac{bcy}{a} + \frac{1}{4}cc$.

$- \frac{1}{2}cc$.

Quocirca deletis delendis, factâque decenti tranſpoſitione, fiet $\frac{bcy}{a} + by - \frac{bbyy}{aa} + \frac{1}{4}cc \infty xx + \frac{2byx}{a} - cx$. Quod erat propoſitum.

Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis IX.

Sit æquatio $yy + \frac{bxy}{a} - cy \infty ax - \frac{bbxx}{4aa} - cc$. Aſſumatur juxta Regulam $z \infty y + \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}c$, eritque $y \infty z - \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}c$. Quo ſubſtituto in locum ipſius y, & ejus quadrato loco yy, fient æquationis termini, ut ſequitur: $zz \infty ax - \frac{bcx}{2a} - \frac{3}{4}cc$. Facilitatis ergo pro $a - \frac{bc}{2a}$ ſcribatur d, ſupponendo a eſſe majorem quàm $\frac{bc}{2a}$, eritque æquatio $zz \infty dx - \frac{3}{4}cc$. Et apparet eandem reductam eſſe ad formulam Theorematis IX, ac propterea Locum quæſitum eſſe Parabolam, quàm ex iis, quæ jam explicata ſunt, determinare ac deſcribere facillimum erit; ut ex ſequenti figura iisque quæ ſuper eâdem breviter annotata ſunt, colligere licebit.

Determinatio Loci.

Sit initium immutabile ipſius x punctum A.

A E indefinitè $\infty\ x$.

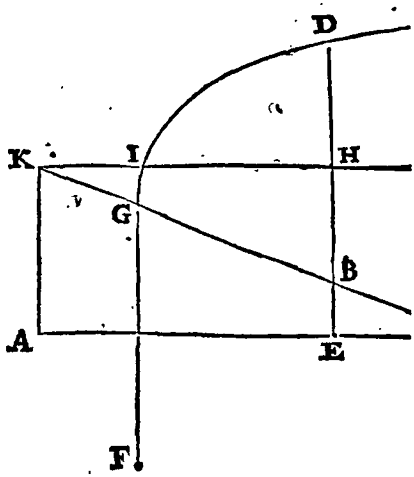
E D omnesque ipſi parallelæ $\infty\ y$.

E A K vel A E D, angulus quem x & y comprehendere debent.

A K $\infty \frac{1}{2}c$.

K H parallela ipſi A E.

Vt $2a$ ad b, ita K H ſeu x ad H B : unde H B erit $\infty \frac{bx}{2a}$.



Vt $2a$ ad e, ita K H ſeu x ad K B : unde K B (in quâ diameter) $\infty \frac{ex}{2a}$.

dx diviſum per $\frac{ex}{2a}$, reddit $\frac{2ad}{e}$: unde latus rectum, quod ſit F G, erit $\infty \frac{2ad}{e}$.

$\frac{3}{4}cc$ diviſum per $\frac{2ad}{e}$, reddit $\frac{3cce}{8ad}$: unde K G ſit $\infty \frac{3cce}{8ad}$, atque G B $\infty \frac{ex}{2a} - \frac{3cce}{8ad}$.

Hinc ſi G B diametro & latere recto F G per verticem G deſcripta ſit Parabola, ſecans K H in I, erit I D Locus quæſitus.

Demonſtratio.

Eſto punctum D utcunque ſumptum in I D, & D E ducta parallela ipſi A K, quæ ſi vocetur y; erit H D $\infty y - \frac{1}{2}c$, ac D B ∞ $y - \frac{1}{2}c + \frac{bx}{2a}$, hoc eſt, z. Cujus quadratum cum æquetur rectangulo F G B, erit $zz \infty dx - \frac{3}{4}cc$, hoc eſt, $yy - cy + \frac{1}{4}cc + \frac{bxy}{a} - \frac{bcx}{2a} + \frac{bbxx}{4aa} \infty ax - \frac{bcx}{2a} - \frac{3}{4}cc$. Ac proinde, ſi utrinque demantur æquales, terminique ritè tranſponantur, habebitur $yy + \frac{bxy}{a} - cy \infty ax - \frac{bbxx}{4aa} - cc$. Quod erat propoſitum.

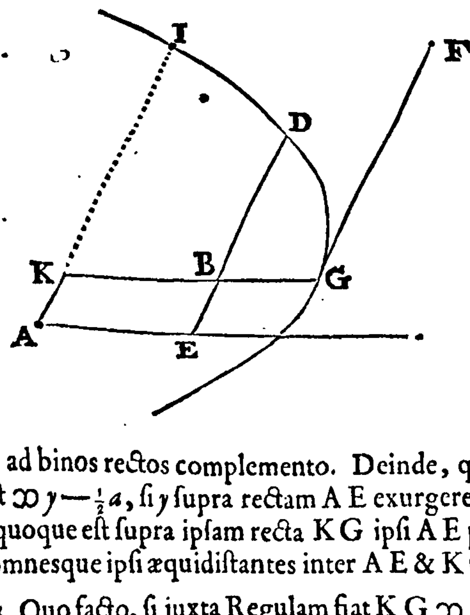
Atque hujus quidem exempli converſum, ut & cæteros caſus huc ſpectantes, ex iis, quæ jam dicta ſunt, ſimili modo reducere atque reſolvere non difficile erit.

Exem-

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis X.

Si æquatio ſit $ay - yy \infty bx$, ſive, quod idem eſt, $yy - ay + bx \infty 0$, aſſumpto juxta Regulam $z \infty y - \frac{1}{2}a$, erit $y \infty z + \frac{1}{2}a$. Quo ſubſtituto in locum ipſius y, & ejuſdem quadrato loco yy, remanebit $zz \infty \frac{1}{4}aa - bx$. Vnde apparet, eandem eſſe reductam ad caſum Theorematis X, ideoque per ea, quæ ibidem ſunt demonſtrata, Locum quæſitum eſſe Parabolam.

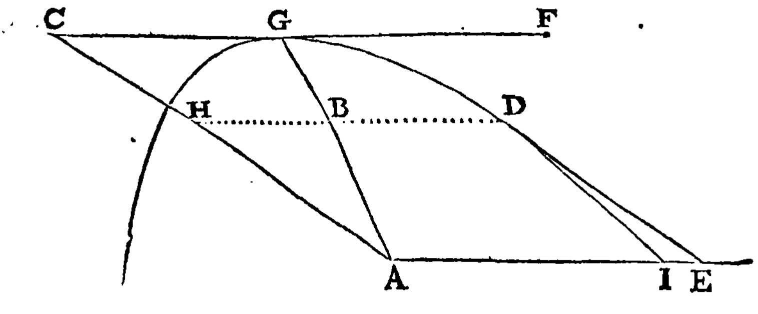
Ad cujus ſpecificam determinationem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile punctum A, eademque x ſe indefinitè ab A versùs E extendere intelligatur; ſit autem datus vel aſſumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A K,



aut ipſius ad binos rectos complemento. Deinde, quoniam z aſſumpta eſt $\infty y - \frac{1}{2}a$, ſi y ſupra rectam A E exurgere intelligatur, ducenda quoque eſt ſupra ipſam recta K G ipſi A E parallela, ita ut A K omneſque ipſi æquidiſtantes inter A E & K G interceptæ ſint $\infty \frac{1}{2}a$. Quo facto, ſi juxta Regulam fiat K G $\infty \frac{aa}{4b}$, eademque ſumatur pro Parabolæ diametro, ad quam ordinatim applicatæ ſint ipſi A K parallelæ, cujuſque latus rectum F G ſit ∞b: erit ipſius portio deſcripta G D I, quæ inter verticem G & productam A K intercipitur, Locus quæſitus.

Etenim aſſumpto in curva G D I puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipſi A K parallelâ, quæ ſecet diametrum K G in B, ſi eadem D E vocetur y: erit D B ∞ $y - \frac{1}{2}a$ ſeu z, ac G B ſive G K — K B ∞ $\frac{aa}{4b} - x$. Hinc, cum ex natura Paraboles quadratum ex B D ſit æquale rectangulo F G B, erit $zz \infty \frac{1}{4}aa - bx$, hoc eſt, $yy - ay + \frac{1}{4}aa \infty \frac{1}{4}aa - bx$, ſive $yy - ay + bx \infty o$, ſive etiam $ay - yy \infty bx$. Quod erat propoſitum.

Si æquatio fuerit $\frac{bbyy}{aa} + dy - cc \infty \frac{2byx}{a} - xx$, ſive, quod idem eſt, $xx - \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa} + dy - cc \infty o$: aſſumpto juxta Regulam $v \infty x - \frac{by}{a}$, erit $x \infty v + \frac{by}{a}$. Quo ſubſtituto in locum ipſius x, ejuſdemque quadrato loco xx, fiet, omnibus ritè ordinatis, $cc - dy \infty vv$. Vnde apparet caſum eſſe Theorematis X converſim, ac proinde Locum quæſitum eſſe Parabolam. Quæ quidem ut ſpecificè deſcribatur, eſto ipſius x initium immutabile A punctum, intelligaturque eadem x ſe extendere ab A verſùs E indeterminatè, ſitque angulus datus vel aſſumptus, quem y



& x comprehendunt, æqualis angulo E A H aut ipſius ad duos rectos complemento. Deinde ſumatur in A H recta A C $\infty \frac{cc}{d}$, ducaturque ex C recta C F ipſi A E parallela, atque in eadem ſumptâ C G, quæ ſe habeat ad C A, ut cognita b ad a cognitam, hoc eſt, ut ſit uti a ad b, ita A C ad C G, agatur A G, eaque pro diametro Parabolæ ſumatur, quæ per verticem G verſùs A erit deſcribenda. Porrò cum in triangulo A C G ob rationem cognitam laterum

A C,

A C, C G, cognitum angulum C comprehendentium, utpote dato vel aſſumpto aut ejuſdem ad duos rectos ſupplemento æqualem, cognita item ſit ratio, quam habet A C ad A G, quæ ſit ut a ad e; erit, A C exiſtente $\propto \frac{cc}{d}$, A G $\propto \frac{cce}{ad}$. Per quam ſi terminus æquationis, in totum cognitus, nimirum cc, dividatur, orietur $\frac{ad}{e}$ pro latere recto. Ac proinde ſi fiat G F $\propto \frac{ad}{e}$, erit G F latus rectum quæſitæ Parabolæ, diametro G A correſpondens; atque iccirco ſi ad dictam diametrum, dictumque latus rectum Parabola deſcribatur, ut G D I, ſecans A E in I: dico I D G curvam eſſe Locum quæſitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductiſque D E ipſi A H, ac D B H ipſi A E parallelis, ſi eadem D E exprimatur per y, erit quoque A H $\propto y$. Cumque ſit ut A C ad C G, id eſt, ut a ad b, ita A H ad H B: erit H B $\propto \frac{by}{a}$, ideoque cum D H ſeu A E ſit $\propto x$, erit D B $\propto x - \frac{by}{a}$ ſeu v. Similiter cum ſit ut A C ad A G, hoc eſt, ut a ad e, ita A H ſeu y ad A B: erit A B $\propto \frac{ey}{a}$, & G A — A B ſeu G B $\propto \frac{cce}{ad} - \frac{ey}{a}$. Hinc cum ex natura Paraboles rectangulum F G B ſit æquale quadrato ex B D, erit, factâ multiplicatione ipſius F G ſeu $\frac{ad}{e}$ in G B ſeu $\frac{cce}{ad} - \frac{ey}{a}$, & ipſius BD ſeu v in ſe ipſam, $cc - dy \propto vv$. Hoc eſt, reſtituto $x - \frac{by}{a}$ loco v, erit $cc - dy \propto xx - \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa}$, vel $\frac{bbyy}{aa} + dy - cc \propto \frac{2byx}{a} - xx$. Quod determinandum, demonſtrandumque erat.

Obiter autem & hîc notandum, ut ex antedictis quoque facile eſt colligere, aliter etiam diametrum G A atque latus rectum G F indagari potuiſſe, hoc modo:

Cum A H indeterminatè ſit $\propto y$, juxta primum Theorema hujus ita ducatur A G, ut recta H B, quemadmodum & quælibet alia ipſi A E parallela, quæ inter A H & A G intercipitur, ſit $\propto \frac{by}{a}$; ponaturque ratio, quæ eſt inter A H & A B ſimileſque, ut a ad e: ideoque cum A B indeterminatè ſit $\propto \frac{ey}{a}$, terminus æquationis dy

per

per eandem diviſus oſtendet latus rectum ſectionis F G ∞ $\frac{ad}{e}$. Similiter terminus æquationis cc per prædictum latus rectum ſeu $\frac{ad}{e}$ diviſus dabit quotientem $\frac{cce}{ad}$ pro quæſita A G.

Plura hîc exempla ſubjungere ſupervacuum foret, cum mox omnes omnino caſus poſſibiles generali regulâ annotare ac demonſtrare animus ſit.

Porrò quamvis Regulas capite primo explicatas particularibus ibidem exemplis ſeu caſibus in hypotheſi non illuſtraverimus, neque etiam id aut hîc aut in ſequentibus ullo modo neceſſarium ducamus, quippe cum unuſquiſque, qui Regulas ipſas rectè perceperit, eaſdem quibuſlibet propoſitis exemplis ſeu caſibus in hypotheſi facilè applicare valeat: quandoquidem tamen libro primo inſignes quaſdam proprietates Parabolæ, Hyperbolæ, atque Ellipſis conſultò prætermiſimus, eâ mente, ut in hoc libro ſuis locis per modum Problematum non incongruè proponi ac demonſtrari, ſimulque tanquam propoſitarum Regularum particularia exempla haberi poſſent, earundem explicationem hîc & ſub finem ſequentis capitis ſubjiciemus.

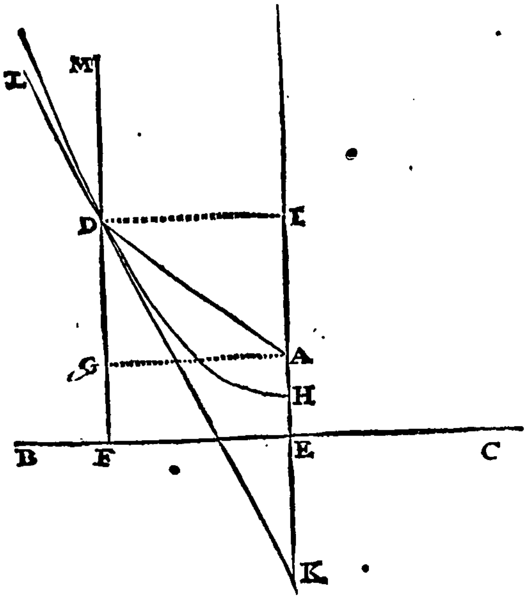
PROBLEMA I.

Propoſitio 11.

Datis puncto & lineâ rectâ, in plano per utrumque ducto aliud punctum invenire, à quo binæ rectæ, altera ad datum punctum, altera ad datam lineam perpendiculariter ductæ, ſibi invicem ſint æquales: & quoniam infinita ſunt ejuſmodi puncta, quæ quæſtioni ſatisfaciunt, Locum determinare ac deſcribere, in quo cuncta & ſingula reperiantur.

Sit datum punctum A, & data poſitione recta linea B C, oporteatque in plano quod per utrumque ducitur, aliud punctum invenire,

nire, quemadmodum D; ita ut ductæ rectæ D A, D F, quarum hæc ad datam B C intelligitur perpendicularis, ſibi invicem æquales ſint.



Ductâ perpendiculari A E, quæ vocetur a, ac ſuppoſitis juxta Regulam binis lineis E F, F D incognitis atque indeterminatis datum angulum rectum E F D comprehendentibus tanquam cognitis ac determinatis, quarum prior E F vocetur x, ac poſterior F D nominetur y; ſi ducta præterea intelligatur A G ipſi E F æquidiſtans, erit in triangulo rectangulo A G D baſis A D ∞ y, utpote ∞ ductæ D F; latus verò A G ſeu recta E F ∞ x, & G D, ſive (ſi punctum G cadat inter D & F) F D — A E, aut (ſi punctum D inter F & G cadat) A E—F D ∞ $y = a$. Vnde, cum quadratum baſis æquale ſit binis laterum quadratis ſimul ſumptis, æquatio erit yy ∞ $xx + yy - 2ay + aa$, hoc eſt, ablatis iis quæ ſe invicem deſtruunt, omnibusque ritè ordinatis, erit $2ay - aa$ ∞ xx. Qui quidem caſus eſt Theorematis noni hujus libri converſim, ac proinde Locus quæſitus erit linea Parabolica. Quare ſi juxta

ea, quæ ibidem expoſita ſunt, ex E ducatur recta E I indefinitè extenſa atque ipſi F D æquidiſtans; & ab eadem auferatur recta E H $\infty \frac{aa}{2a}$, id eſt, $\frac{1}{2}a$: erit deſcribendæ Parabolæ diameter in dicta E I, (quæ quidem diameter axis quoque eſt, propter angulum E F D rectum) vertex autem in H, ac parameter ∞ 2 a. Vnde, per ea quæ libri primi capite primo expoſita ſunt, Parabolam ipſam deſcribere facillimum erit. Cumque porrò axis punctum A, utpote quod ab H vertice diſtat quartâ ipſius parametri parte, id ipſum ſit, quod vulgò Parabolæ Focus ſeu Vmbilicus nuncupatur, apparet ex præmiſſis rectè inferri, quæ ſequuntur.

Corollarium 1.

Quæ ab Vmbilico ad quodlibet Parabolæ punctum recta ducitur æqualis eſt axis portioni per applicatam ab eodem puncto abſciſſæ & quadrante parametri per verticem productæ.

Conſtat enim ex antedictis rectam A D, utcunque aſſumptum fuerit in curva punctum D, ſi per idem illud ad axem ordinatim applicata ſit D I, æqualem eſſe perpendiculari D F, hoc eſt, rectæ I E, nempe axis portioni, per applicatam D I abſciſſæ, & per verticem H, longitudine H E ∞ $\frac{1}{2}a$, id eſt, quadrante parametri, productæ.

Corollarium 2.

Manifeſtum quoque eſt ex antedictis, ſi poſitis quæ ſupra, & productâ F D, uti ad M, per aſſumptum punctum D contingens ducta ſit, ut L D K, angulum F D K ſive M D L angulo A D K æqualem eſſe.

Occurrat enim contingens L D K axi producto in K, eritque [1] recta I H ipſi H K, ideoque (æqualibus H E, A H utrinque additis) recta I E, hoc eſt, A D, ipſi A K æqualis; ac proinde [2] & angulus A D K angulo A K D, hoc eſt, angulo F D K ſive M D L æqualis ſit neceſſe eſt.

[1] *per 1 Cor. 2 primi huius.*
[2] *per 5 primi.*

CA-

CAPUT III.

Tertio autem caſu ſupra expreſſo, cùm nempe quantitatum incognitarum ùtraque ad quadratum aſcendit, ſive altera in alteram ducta in æquatione reperitur, neque æquatio ad terminos magis ſimplices reduci poteſt, ad aliquam ſequentium formularum deventum erit;

I. $yx \propto ff$.

II. $\frac{lyy}{g} \propto xx - ff$.

III. $yy - ff \propto \frac{lxx}{g}$.

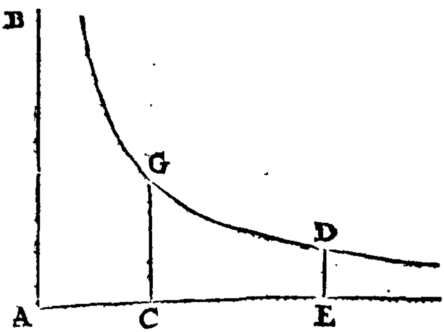
IV. $\frac{lyy}{g} \propto ff - xx$.

THEOREMA XI.

Propoſitio 12.

Si æquatio ſit $yx \propto ff$, Locus quæſitus eſt Hyperbola.

Sit enim, ut in præcedentibus, ipſius x initium immutabile A punctum, atque eadem illa x per rectam AE indefinitè ſe extendere intelligatur; ſitque datus vel aſſumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAB, aut ejuſdem ad binos rectos ſupplemento. Deinde ſumatur in AE recta AC$\propto f$, ducaturque CG eidem



æqualis ac ipſi AB parallela, deſcriptâque [1] per punctum G atque

[1] per ea quæ in Corol. ad 11 & 12, nec non cap. ult. lib. primi hujus tradita ſunt.

que Aſymptotis A E, A B Hyperbolâ G D: dico curvam G D eſſe Locum quæſitum.

Sumatur enim in eadem curva punctum utcunque, veluti D, ductâque D E ipſi A B parallelâ, erit ex natura Hyperboles [1] rectangulum A E D rectangulo A C G, hoc eſt, quadrato ex A C æquale. Hinc, cum A E ſit aſſumpta pro incognita quantitate x, ſi E D vocetur y, erit $yx \infty ff$. Quod determinandum, demonſtrandumque erat.

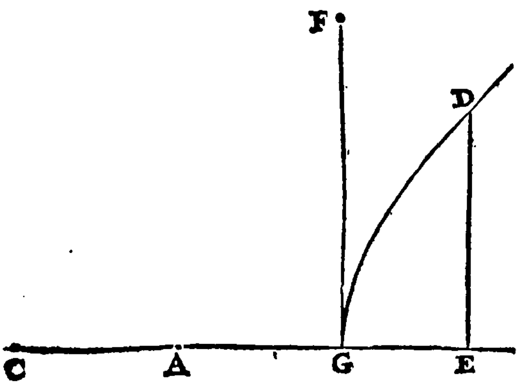
[1] per 3 primi hujus.

THEOREMA XII.

Propoſitio 13.

Si æquatio ſit $\frac{lyy}{g} \infty xx - ff$, erit Locus quæſitus linea Hyperbolica.

Aut enim l ipſi g æqualis eſt aut inæqualis, & ſi æqualis ſit, erit ſuperior æquatio eadem ac ſi eſſet $yy \infty xx - ff$ (quod ſemel monuiſſe ſufficiat). Ac facilè apparet, ſi ipſius x initium immutabile ſit punctum A, atque eadem x ſe in linea A E ab A versùs E indefinitè extendere intelligatur, ſitque angulus datus vel aſſumptus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo A G F,



quòd ſi tam A G quàm A C fiant ∞f cognitæ, ac G F ſumatur ∞ G C, centroque A, & transversâ diametro C G ipſi G F lateri recto ſive parametro æquali deſcribatur [2] Hyperbola, ut G D, eandem curvam G D fore Locum quæſitum.

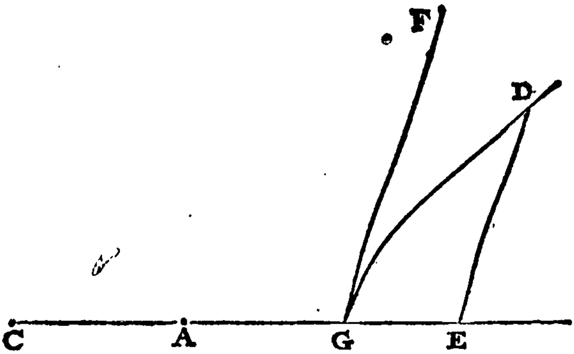
Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipſi F G parallelâ, erit [3] ex natura Hyperboles, cùm C G & G F ſupponantur æquales, quadratum ex D E æquale rectangulo C E G.

[2] per ea quæ cap. ult. primi hujus oſtenſa ſunt.

[3] per 10 primi hujus.

. CEG. Hinc, ſi DE vocetur y, cum ex hypotheſi CE ſeu AE + AC ſit $\infty\ x + f$, & GE ſive AE — AG $\infty\ x - f$, erit $yy \infty xx - ff$.

At verò ſi l & g ſint inæquales, apparet eſſe, ut l ad g, ita $xx - ff$ ad yy. Ac proinde ſi juxta ea, quæ ſupra expoſita ſunt, non jam parameter GF diametro tranſverſæ CG æqualis, ſed ut l ad g,



ita fiat tranſverſa diameter CG ad GF parametrum, cæteraque omnia, ut ſupra, eodem modo quæſito erit ſatisfactum.

Eſt enim [1] ex natura Hyperboles, ut FG ad GC, ita ED [1] quadratum ad CEG rectangulum, hoc eſt, ut g ad l, ita yy ad $xx - ff$, unde, revocando proportionem ad æqualitatem, erit $lyy \infty gxx - gff$. Ac proinde ſi utraque hujus æqualitatis pars dividatur per g, erit $\frac{lyy}{g} \infty xx - ff$. Quod determinandum, demonſtrandumque erat.

[1] per 10 primi hujus.

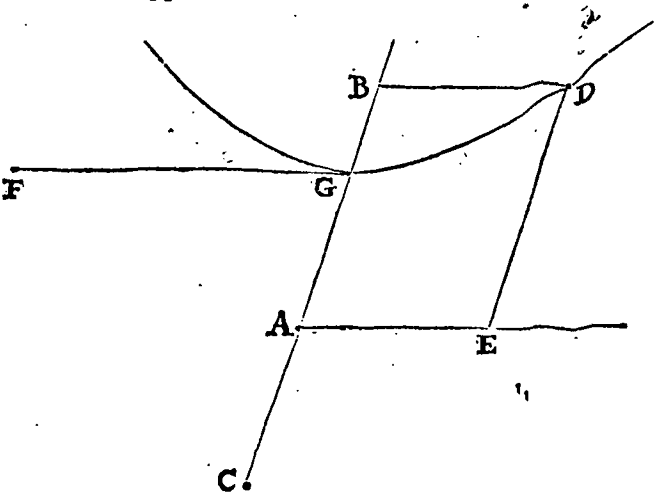
THEOREMA XIII.

Propoſitio 14.

Si æquatio ſit $yy - ff \infty \frac{lxx}{g}$, erit Locus quæſitus Hyperbola.

Ad cujus determinationem ſpecificam eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile punctum A, ipſaque x ſe ab A verſùs

E in linea A E indefinitè extendere intelligatur, ſitque angulus quem y & x comprehendunt æqualis angulo E A G aut ejuſdem ad duos rectos ſupplemento. Deinde, cum ſit ut l ad g, ita $yy - ff$



ad xx, ſtatim apparet, ſi tam A G quam A C ſumantur æquales f cognitæ, fiatque ut l ad g, ita C G ad G F (quæ quidem G F ſit ipſi A E parallela), ac poſtea centro A, tranſversâ diametro C G, & parametro G F Hyperbola deſcribatur G D, eandem curvam G D fore Locum quæſitum.

Sumpto namque in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipſi A G, ac D B ipſi A E parallelâ, ſi eadem D E vocetur y, erit C B, hoc eſt, D E + A C, $\infty\, y + f$; & B G, ſive D E — A G, $\infty\, y - f$, ideoque C B G rectangulum $\infty\, yy - ff$. Dein cum [1] ex natura Hyperbolæ ſit ut C G ad G F, hoc eſt, ex hypotheſi ut l ad g, ita rectangulum C B G ad D B ſive A E quadratum, id eſt, ita $yy - ff$ ad xx: erit $gyy - gff \,\infty\, lxx$, hoc eſt, $yy - ff \,\infty\, \frac{lxx}{g}$: Quod demonſtrandum, determinandumque erat.

[1] per 10 primi hujus.

THEO-

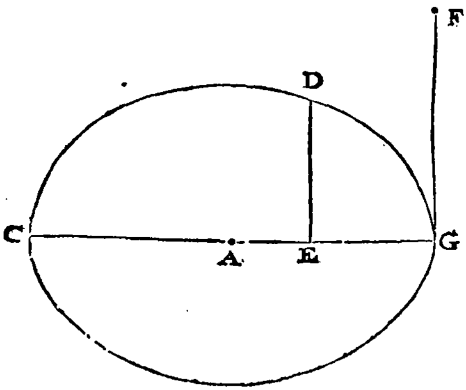
THEOREMA XIV.

Propoſitio 15.

Si æquatio ſit $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$, erit Locus quæſitus Ellipſis.

At verò cum Ellipſeos ſpecies, quæ latera rectum & tranſverſum æqualia habet; angulumque quem ordinatim applicatæ faciunt ad diametrum rectum, ſit Circuli circumferentia: palam fit caſu propoſito Locum quæſitum etiam Circuli peripheriam eſſe poſſe.

Hinc ad prædicti Loci determinationem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile A punctum, atque eadem x ſe per lineam A E ab A verſùs E indeterminatè extendere intelliga-



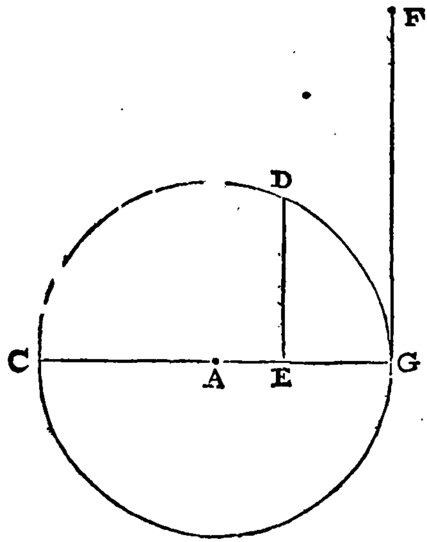
tur, ſitque angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo A G F. Porrò cum ſit ut l ad g, ita $ff - xx$ ad yy: facilè apparet, ſi tam A G quàm A C ſumantur æquales f cognitæ; fiatque ut l ad g, ita C G ad G F, ac centro A, tranſverſâ diametro C G, & parametro G F [1] Ellipſis deſcribatur G D C eandem curvam G D C fore Locum quæſitum.

Sum-

[1] *per* 7 *Corol.* 13 & 1 *Cor.* 14 *primi hujus, ut & per ea quæ circa finem cap.* 4 *ejuſdem lib. tradita ſunt.*

Sumpto namque in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipſi F G parallelâ, erit [1] ex natura Ellipſeos ut F G ad G C, ita E D quadratum ad C E G rectangulum. Hoc eſt, ſi E D vocetur y, cum C E ſit $\infty f+x$, & E G $\infty f-x$, erit ut g ad l, ita yy ad $ff-xx$, unde $\frac{lyy}{g} \infty ff-xx$. Quod erat propoſitum.

[1] *per 13 primi hujus.*



Cæterùm liquidò conſtat, ſi C G & G F æquales fuerint, hoc eſt, ſi $l \infty g$, quòd etiam C E G rectangulum quadrato E D æquale ſit futurum. Ideoque ſi angulus C G F ſit rectus, curvam G D G fore Circuli circumferentiam.

Regula univerſalis, moduſque reducendi omnes æquationes, quæ ex convenienti operatione exiſtunt, cùm Locus vel Hyperbola eſt, vel Ellipſis, vel Circuli circumferentia, ad aliquem quatuor caſuum præcedentium, totidem Theorematibus jam explicatorum.

Si contingat, ut quantitatum incognitarum non modò una in alteram, aut non tantùm alterutra vel utraque in ſe ducta, ſed & vel hæc, vel illa, vel utraque unius præterea dimenſionis in æquatione reperiatur, conſtituens planum cum alia, ſive cognitâ ſive incognitâ,

tâ, ſive etiam cum partim cognita & partim incognita quantitate: oportet loco incognitarum, aut illarum alterutrius, aſſumere alias vel aliam, quæ ipſas excedunt, vel ab iis deficiunt; idque integrâ quantitate, quæ cum illa incognita, in cujus locum nova non eſt aſſumpta, planum conſtituere reperitur, ſi nempe incognitarum neutra in ſe ipſam in æquatione ducta ſit; ſin ſecus, dimidio tantùm ejus quantitatis, quæ planum conſtituit cum incognita, in cujus locum aſſumptio facta eſt, caſu utroque juxta differentem affectionem per ſigna + vel —, quæ præfiguntur iiſdem illis quantitatibus, ita ordinatis, ut cum incognitis ab eadem æquationis parte reperiantur. Quo facto, & reïterato, ubi opùs, ſi ad formulas Parabolarum, capite ſecundo expoſitas perventum non fuerit, ad aliquem quatuor ſuprapoſitorum caſuum reducta erit æquatio, ac proinde ipſi convenientem Locum determinare ac deſcribere, per ea quæ ſuperiùs explicata ſunt, haud difficile erit.

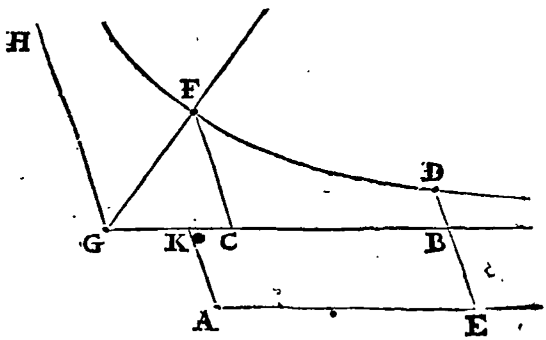
Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis XI.

Si æquatio fuerit $yx - cx + by \infty ee$: aſſumpto $z \infty y - c$, & $v \infty x + b$, erit $z + c \infty y$, & $v - b \infty x$.

Vnde ſi ſecundùm Regulam ubique in æquatione loco y ſubſtituatur $z + c$, erit $zx + cx - cx + bz + bc \infty ee$, ſive $zx + bz + bc \infty ee$; ac rurſus ſi loco ipſius x ſubrogetur $v - b$, erit $zv - bz + bz + bc \infty ee$, id eſt, $zv \infty ee - bc$. aut, (ſi loco termini $ee - bc$, qui in totum cognitus eſt, ſcribatur ff) $zv \infty ff$. Et apparet æquationem reductam eſſe ad formulam Theorematis XI, ac proinde Locum quæſitum eſſe Hyperbolam.

Ad cujus ſpecificam determinationem ac deſcriptionem eſto in appoſita figura initium ipſius x immutabile punctum A, atque eadem x per rectam AE indefinitè ſe extendere intelligatur, ſitque angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAK

aut ejuſdem ad duos rectos ſupplemento. Deinde, quoniam z eſt $\infty\, y - c$; ſi y ſupra lineam A E exſurgere concipiatur, ducenda quoque eſt ſupra eandem recta K B ipſi A E parallela; ita ut pars rectæ A K, omniumque ipſi æquidiſtantium, inter A E & K B intercepta, veluti A K, æquetur c cognitæ. Porrò, quoniam v eſt $\infty\, x + h$, producenda eſt ipſa B K per K uſque ad G, ita ut K G ſit



$\infty\, h$. Quo facto, erit G centrum ipſius curvæ, & G B una Aſymptotωn, eritque altera ipſi A K parallela, ut G H. Vnde ſi juxta Regulam prædicti Theorematis X I in recta G B ſumatur G C æqualis f cognitæ, ducaturque C F eidem G C æqualis, ac parallela rectæ A K vel G H, atque per punctum F, Aſymptotis G B & G H, ſive Aſymptoto G B atque ad axem G F, Hyperbola deſcribatur F D: dico curvam F D fore Locum quæſitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipſi A K parallelâ, quæ ſecet rectam K B in B, ſi eadem D E vocetur y, erit D B ſive D E — E B $\infty\, y - c$, id eſt, z. Eſt autem & G B ſive A E + G K $\infty\, x + h$, hoc eſt, v. Quare cum ex natura Hyperboles rectangulum G B D æquetur G C quadrato, erit quoque $zv \infty ff$. aut reſtitutis $y - c$ loco ipſius z, & $x + h$ in locum ipſius v, atque $ee - ch$ loco ff, erit $yx - cx + hy - ch \infty ee - ch$, hoc eſt, $yx - cx + hy \infty ee$. Quod erat propoſitum.

Exem-

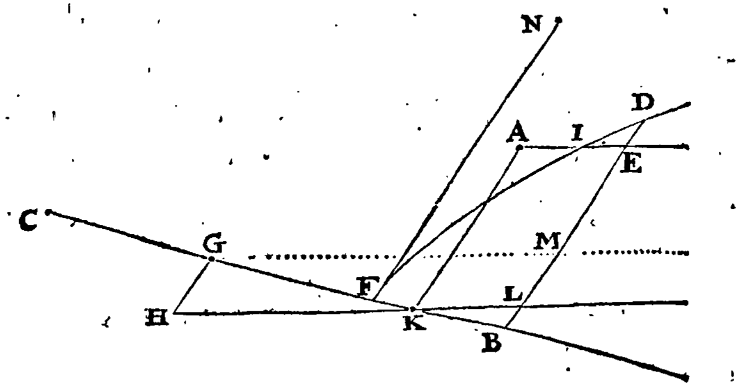
Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis XII & XIII.

Si æquatio ſit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty \frac{fxx}{a} + ex + dd$, aſſumpto $z \infty y + \frac{bx}{a} + c$, erit $y \infty z - \frac{bx}{a} - c$, eoque ſubſtituto in locum ipſius y, atque ejuſdem quadrato loco yy, ſublatisque iis, quæ ſe invicem deſtruunt, erit $zz - \frac{bbxx}{aa} - \frac{2bcx}{a} - cc \infty \frac{fxx}{a} + ex + dd$. Et factâ congruâ tranſpoſitione, $zz \infty \frac{fxx}{a} + \frac{bbxx}{aa} + ex + \frac{2bcx}{a} + dd + cc$, hoc eſt, multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviſo per $fa + bb$; ut quantitas xx abſque fractione remaneat, fiet $\frac{aazz}{fa+bb} \infty xx + \frac{aaex + 2abcx}{fa+bb} + \frac{aadd + aacc}{fa+bb}$.

Deinde aſſumpto $v \infty x + \frac{aae + 2abc}{2fa + 2bb}$, ut terminus quoque æquationis, in quo x unius dimenſionis reperitur, planè evaneſcat, habebitur $x \infty v \frac{-aae - 2abc}{2fa + 2bb}$. Quo ſubſtituto in locum ipſius x, atque ejuſdem quadrato loco xx, ablatisque iis quæ ſe invicem tollunt, reducta erit æquatio ad formulam requiſitam. At verò ut vitetur prolixior operatio loco $\frac{aae + 2abc}{fa+bb}$ ſcribatur $2h$, ita ut fiat æquatio $\frac{aazz}{fa+bb} \infty xx + 2hx \frac{+aadd + aacc}{fa+bb}$. Tum aſſumpto $v \infty x + h$ ſeu $x \infty v - h$, eoque ſubſtituto loco x in æquatione, ac ejuſdem quadrato loco xx: erit $\frac{aazz}{fa+bb} \infty vv - hh + \frac{aadd + aacc}{fa+bb}$. Vnde apparet, ante omnia hîc eſſe conſiderandum, utrum hh ſit majus quàm $\frac{aadd + aacc}{fa+bb}$, an contra. ſi enim majus ſit, erit caſus Theorematis XII; ſin contra, erit caſus Theorematis XIII. Ponatur itaque primò majus, ac proinde æquatio formulæ Theorematis XII, Et conſtat exinde Locum quæſitum Hyperbolam eſſe.

Ad cujus peculiarem determinationem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile A punctum, eademque x in linea A E ab A versùs E indefinitè ſe extendere intelligatur; ſitque angulus

quem x & y comprehendunt æqualis angulo E A K aut ipſius ad duos rectos ſupplemento. Porrò quoniam $z \propto y + c + \frac{bx}{a}$, ſi y ſupra lineam A E exſurgere intelligatur, ut E D, ducenda primùm eſt infra eandem A E recta K L ipſi A E parallela; ita ut pars rectæ A K omniumque ipſi æquidiſtantium inter prædictas A E & K L intercepta, veluti A K, E L, &c. æquetur c cognitæ. Deinde productâ L K uſque ad H, ita ut K H ſit $\propto b$, ideoque H L indefinitè ſumpta $\propto x + b$, hoc eſt, v, ducatur per H punctum recta H G ipſi A K parallela, ita ut K H ad H G ſit, ut a ad b. Quo facto; ſi per puncta G & K recta agatur linea G K B, habebunt omnium ipſi A K parallelarum partes, quæ inter K L & K B in-



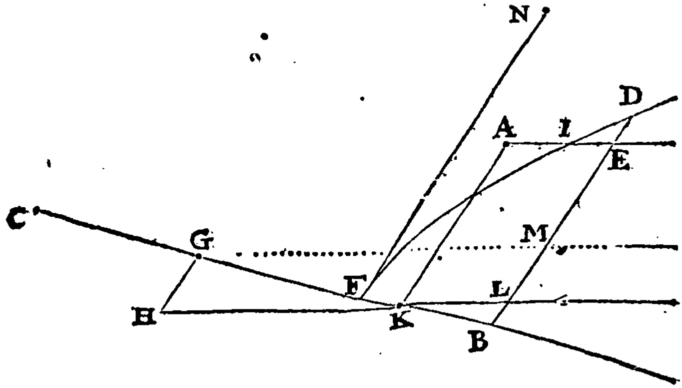
tercipiuntur (ut, exempli gratiâ, L B), ad partes ipſius K L, inter eaſdem parallelas & punctum K interceptas (ut, verbi gratiâ, L K) eandem rationem, quæ eſt inter b & a: hoc eſt, erit ut a ad b, ita K L ad L B, cum utraque ſit ut K H ad H G. Ideoque cum K L ſive A E indefinitè ſumpta ſit $\propto x$, erit L B, ut & quælibet ipſi parallela, inter K L & K B intercepta, $\propto \frac{bx}{a}$: ac proinde omnis linea ſupra A E rectam exſurgens, quæ poſſit eſſe y incognita, ad rectam K B producta, veluti D B ſive D E + E L + L B erit $\propto y + c + \frac{bx}{a}$, hoc eſt, z. Vnde apparet, juxta Regulam lineam G B ſumendam eſſe pro Hyperbolæ diametro, ad quam ordinatim applicatæ ſint ipſi A K ſeu D B parallelæ: eritque ejuſdem

dem Hyperbolæ centrum G punctum. At verò cum ex ante dictis triangulum KHG omnino ſit cognitum, utpote lateribus KH & HG anguloque ad H ſub iiſdem comprehenſo notis, erit quoque cognita ratio lateris KH ad KG, hoc eſt, ipſius GM (quæ per G ipſi KL æquidiſtans intelligitur) ad GB, quæ ſit ut a ad i. Quare cum GM ſeu HL indefinitè ſit v, GB quoque indefinitè concepta, hoc eſt, quælibet diametri portio, inter centrum & ordinatim applicatas intercepta, erit $\frac{iv}{a}$. Cujus quidem interceptæ quadratum cum juxta formulam Regulæ unum æquationis terminum conſtituat, per multiplicationem aut diviſionem, vel per utramque ita reducatur æquatio, ut in eadem quoque idem quadratum, nimirum $\frac{iivv}{aa}$ inveniatur. Quod quidem ut certâ methodo fiat, prædictum quadratum rectæ GB indefinitè conceptæ, hoc eſt, $\frac{iivv}{aa}$, dividatur per æquationis terminum, in quo vv ſive ſimpliciter, ſive aliâ fractione affectum invenitur, ac per inventum quotientem tota æquatio multiplicetur. ut in ſupra poſito exemplo, ſi $\frac{iivv}{aa}$ dividatur per vv, fiet quotiens $\frac{ii}{aa}$. quare tota æquatio multiplicanda eſt per ii, productumque dividendum per aa, ita ut fiat $\frac{iizz}{fa+bb} \infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{iidd+iicc}{fa+bb}$. Vnde ſi juxta Regulam ſemi-latus tranſverſum fiat GF vel GC ∞ $\sqrt{\frac{iibb}{aa} - \frac{iidd-iicc}{fa+bb}}$, atque ratio tranſverſi lateris CF ad rectum FN, ut ii ad $fa+bb$, & iiſdem lateribus, diametroque ac centro jam inventis Hyperbole deſcribatur FD, ſecans rectam AE vel KA productam in I: dico curvam ID eſſe Locum quæſitum.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipſi AK parallelâ, eâque productâ ut ſecet rectam KL in L, & diametro GB occurrat in B, ſi eadem DE vocetur y, erit ex ante dictis DB ∞ z. Eſt autem, ut jam annotatum, GB ∞ $\frac{iv}{a}$, atque ex hypotheſi GF ſeu GC ∞ $\sqrt{\frac{iibb}{aa} - \frac{iidd-iicc}{fa+bb}}$, ideoque BC ∞ $\frac{iv}{a} + \sqrt{\frac{iibb}{aa} - \frac{iidd-iicc}{fa+bb}}$, ac BF ∞ $\frac{iv}{a} -$

 $\sqrt{\frac{iibb}{aa}}$

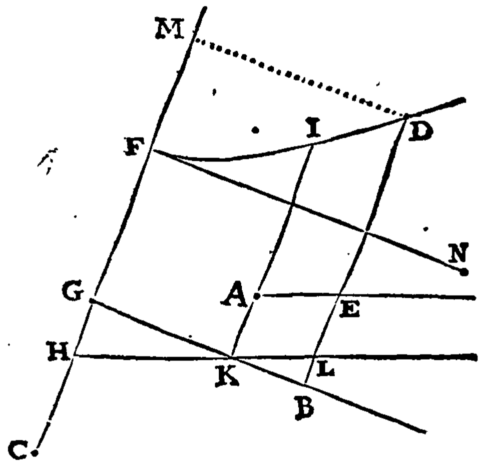
$\sqrt{\frac{iibb}{aa} \frac{-iidd-iicc}{fa+bb}}$, & rectangulum C B F $\infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{iidd+iicc}{fa+bb}$. Hinc cum ex natura Hyperboles N F ad F C, ſeu $fa+bb$ ad ii ſit, ut D B quadratum, hoc eſt, zz, ad prædictum rectangulum C B F: erit $\frac{iizz}{fa+bb} \infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{iidd+iicc}{fa+bb}$.



Multiplicetur jam utrinque per aa, & dividatur per ii, eritque $\frac{aazz}{fa+bb} \infty vv - bb + \frac{aadd+aacc}{fa+bb}$. Dein reſtituto $x+b$ locò v, exurget $\frac{aazz}{fa+bb} \infty xx+2bx+\frac{aadd+aacc}{fa+bb}$; itemque $\frac{eaa+2bca}{fa+bb}$ loco $2b$, exurget $\frac{aazz}{fa+bb} \infty xx+\frac{eaax+2bcax}{fa+bb}+\frac{aadd+aacc}{fa+bb}$. Porrò multiplicatis omnibus per $fa+bb$ iisque diviſis per aa, habebitur $zz \infty \frac{fxx}{a}+\frac{bbxx}{aa}+ex+\frac{2bcx}{a}+dd+cc$. Ac denique reſtituto $y+\frac{bx}{a}+c$ loco ipſius z, expunctisque quæ ſe invicem deſtruunt ac omnibus ritè ordinatis, fiet $yy+\frac{2bxy}{a}+2cy \infty \frac{fxx}{a}+ex+dd$. Quod erat propoſitum.

At verò ponatur ſecundò bb minus quàm $\frac{ddaa+ccaa}{fa+bb}$, & ſupra poſita æquatio $\frac{iizz}{fa+bb} \infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{ddii+ccii}{fa+bb}$, quæ, multiplicatis omnibus ejuſdem terminis per $fa+bb$, ac producto diviſo

diviſo per ii, factâque decenti tranſpoſitione, eadem cum ſequenti $zz - dd - cc + \frac{fabb + bbbb}{aa} \infty \frac{iivv}{aa}$ multip. per $fa + bb$ ac diviſ. per ii, id eſt, $\infty \frac{favv + bbvv}{aa}$. erit formulæ Theorematis XIII, unde Locus quæſitus iterum erit Hyperbola. Ad cujus ſpecificam determinationem & deſcriptionem, poſtquam ut in præcedenti figura ductæ ſunt lineæ A E, A K, K L, K H, H G, & G K B: erit quidem, ut ſupra, G centrum, at verò non erit diameter in linea G K, ſed, juxta Regulam, in linea H G producta

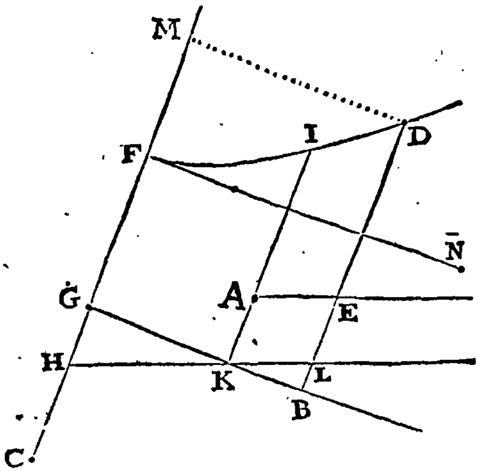


ad partes G, ad quam ordinatim applicatæ ſint ipſi G K B parallelæ, eritque juxta eandem Regulam dimidium tranſverſæ diametri, nempe G F vel G C, æquale $\sqrt{dd + cc - \frac{fabb - bbbb}{aa}}$, ac ratio diametri ad parametrum ut $fa + bb$ ad ii. Quare ſi fiat, ut $fa + bb$ ad ii, ita C F ad F N, quæ quidem F N ipſi G K B æquidiſtans ſit, erit F N parameter: ac proinde ſi centro G tranſversâ diametro C F & parametro F N Hyperbola deſcribatur F D, ſecans ipſam A E vel K A productam in I, erit I D curva Locus quæſitus.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque D B ipſi A K (ſive G F), & D M ipſi G B parallelâ, ſi

E D

ED vocetur y, erit, ut ſupra, DB ſive MG ∞ z, & BG ſive DM ∞ $\frac{iv}{a}$. Cumque ſit GF vel GC $\infty \sqrt{dd+cc\frac{-fabb-bbbb}{aa}}$, erit CM ∞ $z+\sqrt{dd+cc\frac{-fabb-bbbb}{aa}}$, & MF ∞ $z-\sqrt{dd+cc\frac{-fabb-bbbb}{aa}}$, ac propterea rectangulum CMF ∞ $zz-dd-cc\frac{+fabb+bbbb}{aa}$. Eſt autem DM quadratum ∞ $\frac{iivv}{aa}$.



Quare cum ex natura Hyperboles ſit ut FN ad FC, ita DM quadratum ad CMF rectangulum, hoc eſt, ut ii ad $fa+bb$, ita $\frac{iivv}{aa}$ ad $zz-dd-cc\frac{+fabb+bbbb}{aa}$: erit quoque $zz-dd-cc\frac{+fabb+bbbb}{aa} \infty \frac{favv+bbvv}{aa}$. Et multiplicatis omnibus per aa, ac diviſis per $fa+bb$, factâque trânſpoſitione cogniti termini, erit $\frac{aazz}{fa+bb} \infty vv-hh\frac{+ddaa+ccaa}{fa+bb}$. Dein reſtitutis $x+b$ loco v, $\frac{eaa+2bca}{fa+bb}$ loco $2h$, atque $y+\frac{bx}{a}+c$ loco ipſius z, expunctisque quæ ſe invicem deſtruunt ac omnibus ritè ordinatis, fiet $yy+\frac{2bxy}{a}+2cy \infty \frac{fxx}{a}+ex+dd$. Quod determinandum, demonſtrandumque erat.

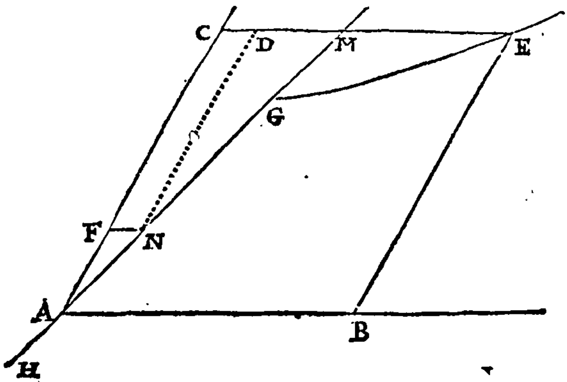
Si

Si æquatio ſit $xx + 2ay \infty \frac{2bxy}{a}$, aut $xx - \frac{2byx}{a} + 2ay \infty 0$. Aſſumpto juxta Regulam $v \infty x - \frac{by}{a}$, erit $x \infty v + \frac{by}{a}$, eoque ſubſtituto in locum ipſius x, ejuſdemque quadrato loco $x\,x$, ſublatiſque iis quæ ſe invicem deſtruunt, erit $vv - \frac{bbyy}{aa} + 2ay \infty 0$. &, factâ congruâ tranſpoſitione, $vv \infty \frac{bbyy}{aa} - 2ay$; hoc eſt, multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviſo per bb, $\frac{aavv}{bb} \infty yy - \frac{2a^3y}{bb}$. Dein, aſſumpto $z \infty y - \frac{a^3}{bb}$, habebitur $y \infty z + \frac{a^3}{bb}$, eoque ſubſtituto in æquatione loco ipſius y, atque ipſius quadrato loco yy, erit $\frac{aavv}{bb} \infty zz - \frac{a^6}{b^4}$, ſive $zz - \frac{a^6}{b^4} \infty \frac{aavv}{bb}$. Qui quidem caſus eſt Theorematis 13tii, ac proinde Locus quæſitus erit Hyperbola.

Ad cujus itaque peculiarem determinationem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile A punctum, eademque x in linea A B ab A versùs B indefinitè ſeſe extendere intelligatur, ſitque angulus, quem x & y comprehendunt, æqualis angulo A B E. Deinde, quoniam ex antedictis facilè colligitur Hyperbolam hoc caſu & ſimilibus ita eſſe deſcribendam, ut ordinatim ad ejus diametrum applicatæ ſint ipſi A B æquidiſtantes, ductâ rectâ A C ipſi B E parallelâ, quoniam $v \infty x - \frac{by}{a}$, ducenda porrò eſt recta A M; ita ut omnium ipſi A B parallelarum partes, inter A C & A M interceptæ, veluti C M, ad partes ipſius A C inter A & dictas parallelas interceptas, veluti A C, eandem rationem habeant, quæ eſt inter b & a; hoc eſt, ut ſit quemadmodum a ad b, ita A C ad C M. Vnde ſi A C ſeu B E indefinitè ſumpta vocetur y, erit C M & ſimiles $\infty \frac{by}{a}$, ac deſcribendæ Hyperboles diameter in dicta A M. Porrò, quoniam $z \infty y - \frac{a^3}{bb}$, ſi ab A C auferatur A F $\infty \frac{a^3}{bb}$: erit F C indefinitè ſumpta ∞z, &, ductâ F N ipſi A B parallelâ, N centrum. Ac proinde, cum ratio ductæ N D ipſi F C æquidiſtantis & æqualis ad rectam D M aliarumque ſimilium ſit cognita, nempe ut a ad b, ſitque itidem notus angulus

 N D M,

N D M, ſub iiſdem comprehenſus, utpote æqualis dato vel aſſumpto angulo A B E, erit quoque ratio N D ad N M aliarumque ſimilium nota, quæ ſit ut a cognitæ ad e itidem cognitam.



Hinc cum N D ſeu F C indefinitè ſumpta exprimatur per z, erit N M itidem indefinitè ſumpta $\infty \frac{ez}{a}$, cujus quidem quadratum cum juxta formulam Regulæ unum æquationis terminum conſtituere debeat, multiplicanda eſt ſupraſcripta æquatio per ee, productumque dividendum per aa, ita ut fiat $\frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4} \infty \frac{eevv}{bb}$. Quo peracto, ſi juxta Regulam ſemi-latus tranſverſum fiat N G vel N H $\infty \frac{eaa}{bb}$, ac ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut ee ad bb; iiſdemque lateribus ac diametro & centro jam inventis Hyperbole deſcribatur G E: dico curvam G E eſſe Locum quæſitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti E, ductâque E B in angulo A B E, dato vel aſſumpto æquali, nec non E C ipſi A B parallelâ, ſecante diametrum A M in M; ſi eadem E B, hoc eſt, A C, vocetur y, erit, ut ſupra, C M $\infty \frac{by}{a}$, ac proinde M E, ſive A B—C M, $\infty x - \frac{by}{a}$, hoc eſt, v. Eſt autem, ut ſuperiùs annotatum, N M $\infty \frac{ez}{a}$, atque ex hypotheſi N G ſeu N H $\infty \frac{eaa}{bb}$, ideoque H M $\infty \frac{ez}{a} + \frac{eaa}{bb}$, & M G $\infty \frac{ez}{a} - \frac{eaa}{bb}$, ac proinde rectangulum

gulum HMG $\infty \frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4}$: hinc cum ex natura Hyperboles ſit ut latus rectum ad tranſverſum, ſive ut bb ad ee, ita ME quadratum, id eſt, vv, ad prædictum rectangulum HMG: erit $\frac{eevv}{bb} \infty \frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4}$, &, multiplicatis omnibus terminis per aa, factoque per ee diviſo, $\frac{aavv}{bb} \infty zz - \frac{a^6}{b^4}$. Dein reſtituto $y - \frac{a^3}{bb}$ in locum ipſius z, exurget $\frac{aavv}{bb} \infty yy - \frac{2a^3y}{bb}$; adeoque, multiplicatis omnibus per bb, factoque diviſo per aa, habebitur $vv \infty \frac{bbyy}{aa} - 2ay$. Denique reſtituto $x - \frac{by}{a}$ in locum ipſius v, expunctisque iis quæ ſe invicem deſtruunt, atque omnibus ritè ordinatis, fiet $xx + 2ay \infty \frac{2byx}{a}$. Quod fuit propoſitum.

PROBLEMA II.

Propoſitio 16.

Datis duobus punctis tertium invenire, à quo ad bina data ductæ rectæ lineæ dato differant intervallo, locumque determinare ac deſcribere, quem quæſitum punctum contingat.

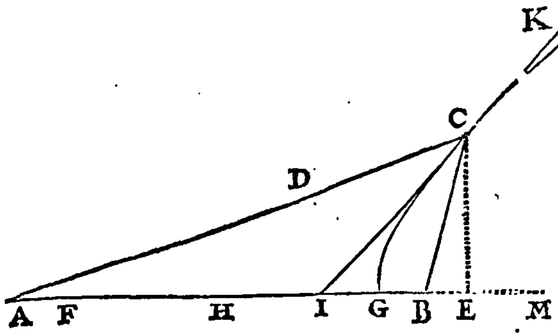
Sint data duo puncta A & B, oporteatque invenire tertium, utputa C, ita nempe ut ductæ rectæ C A, C B differant dato intervallo F G ſeu A D.

Quoniam in quæſtione angulus datus non eſt, quò facilior ſit operatio, aſſumatur rectus, ideoque à puncto C in rectam A B, quæ data puncta conjungit, productam, ſi opùs fuerit, intelligatur demiſſa perpendicularis, ut C E; tum, ſuppoſitis, juxta Regulam, A E & E C incognitis atque indeterminatis, aſſumptum angulum A E C comprehendentibus, tanquam cognitis ac determinatis, earum prior, nimirum A E, vocetur x, ac poſterior, nempe E C, nominetur y, ipſa autem A B, ſeu datorum punctorum cognita diſtantia, vocetur a, & data F G ſive A D exprimatur per b. Hinc cum B E ſive (ſi punctum B cadat inter A & E) A E — A B, aut (ſi punctum E inter A & B cadat) A B — A E ſit

 ∞x

$\infty\ x = a$, & A C $\infty \sqrt{xx+yy}$, at B C $\infty \sqrt{xx-2ax+aa+yy}$; ſitque A C — A D ∞ B C: æquatio erit
$\sqrt{xx+yy}-b \infty \sqrt{xx-2ax+aa+yy}$, factâque operatione convenienti, ut utraque æquationis pars à ſigno radicali liberetur, & tranſpoſitis tranſponendis, erit
$4bbyy \infty 4aaxx-4bbxx-4a^3x+4bbax+a^4-2bbaa+b^4$.
Vnde factâ diviſione per $4aa-4bb$ habebitur $\frac{bbyy}{aa-bb} \infty xx-ax+\frac{1}{4}aa-\frac{1}{4}bb$. Deinde aſſumpto juxta Regulam $v \infty x-\frac{1}{2}a$, erit $x \infty v+\frac{1}{2}a$, ideoque ſubſtituto hoc valore in locum ipſius x, atque ejuſdem quadrato loco xx, expunctiſque iis quæ ſe invi-

Fig. 1.



cem deſtruunt, erit $\frac{bbyy}{aa-bb} \infty vv-\frac{1}{4}bb$. Qui quidem caſus eſt Theorematis 12^mi hujus libri, ac proinde Locus quæſitus erit Hyperbola. Cumque v aſſumpta ſit pro $x-\frac{1}{2}a$, ſi ab A versùs E ſumatur A H $\infty\ \frac{1}{2}a$, erit, juxta Regulam, H centrum, & ſemidiameter tranſverſa (puta H G ab una, & H F ab altera parte,) $\infty \sqrt{\frac{1}{4}bb}$, id eſt, $\frac{1}{2}b$; ita ut diameter tranſverſa F G (quæ quidem, ob applicatam C E ad diametrum H E perpendicularem, tranſverſus quoque axis eſt,) ſit $\infty\ b$. Ratio autem tranſverſæ diametri ad parametrum, ſeu quadrati tranſverſæ ad quadratum ſecundæ diametri, erit ut bb ad $aa-bb$. Vnde per ea quæ libri primi capitibus ſecundo & ultimo expoſita ſunt Hyperbolam ipſam deſcribere haud difficile erit. Porrò cum quadratum ſemidiame-

diametri tranſverſæ ſit $\infty \frac{1}{4}bb$, erit quadratum ſemi-ſecundæ diametri $\infty \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$. Atqui cum FB ſive BH + HF ſit $\infty \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, & BG ſive BH — HG $\infty \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, erit quoque rectangulum FBG $\infty \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$, nempe ∞ quadrato ſemi-ſecundæ diametri, ſive, ut Veteres loquebantur, æquale quadranti figuræ ad tranſverſum axem factæ: ideoque puncta A & B ea ipſa ſunt, quæ vulgo oppoſitarum Hyperbolarum Foci ſive Vmbilici nuncupantur. Vnde apparet, ex præmiſſis rectè inferri, quæ ſequuntur.

Corollarium I.

Si ab aſſumpto utcunque in Hyperbola puncto ad utrumque Vmbilicum rectæ ducantur, earum major minorem longitudine tranſverſi axis ſuperabit.

Etiamſi veritas præcedentis Corollarii ex antedictis omnino conſtet, cum tamen illud à Veteribus, Recentioribuſvè, quòd ſciam, non niſi per multas ambages longâque difficilium Theorematum concatenatione hactenus demonſtratum ſit: id ipſum hîc demonſtratione unicâ, & quidem breviore ſatisque ſimplici, aliter oſtendiſſe non inutile fortè judicabitur.

Eſto igitur Hyperbola quælibet GC, cujus centrum H, tranſverſus axis FG, atque Vmbilici A & B, adeoque rectangulum FBG ut & GAF ſemi-ſecundæ diametri quadrato æquale. Ductis autem ab aſſumpto quolibet curvæ puncto C ad puncta A & B rectis CA, CB, ordinatim ad axem applicetur CE, fiatque ut HF ad HA, ita HE ad HM, ideoque [1] AHE rectangulo æquale rectangulum FHM. Vnde cum ſit [2], ut

HFq ad GAF, ita FEG ad CEq: erit quoque, per compoſ. rationis contrariam, ut

HFq ad (HFq + GAF, id eſt [3], ad) HAq; ita FEG ad FEG + CEq; adeoque [4] ut

HFq ad HAq, ita (HFq + FEG ſive [5]) HEq ad HAq + FEG + CEq. Eſt autem quoque [6], ut

HFq ad HAq, ita HEq ad HMq. Quocirca [7]

HMq ∞ HAq + FEG + CEq; hoc eſt, addito utrinque HFq ſeu HGq, erit

 HM

[1] *per 16 ſexti.* [2] *ex hypoth. & per 10 primi hujus.* [3] *per 6 ſecundi.* [4] cum ſit ut una antecedentium ad unam conſeq., ita omnes antecedentes ad omnes conſeq. *per 12 quinti.* [5] *per 6 ſecundi.* [6] *ex conſtructione & per 22 ſexti.* [7] *per 9 & 11 quinti.*

[1] per 6 *ſecundi.* $HMq + \left\{\begin{array}{l} HFq \\ \text{ſeu} \\ HGq \end{array}\right. \infty \left\{\begin{array}{l} HAq \\ \text{ſeu} \\ HBq \end{array}\right. + (HFq + FEG, \text{i.e.}^{1})\, HEq, + CEq.$

Hinc additis vel ſublatis ab utraque æquationis parte æqualibus,

[2] per 4 *ſecundi.* nimirum $\left\{\begin{array}{l} FHM \\ \text{ſeu} \\ GHM \end{array}\right.$ bis ab una, & $\left\{\begin{array}{l} AHE \\ \text{ſeu} \\ BHE \end{array}\right.$ bis ab altera parte: erit [2]

[3] per 47 *primi.* FMq ∞ (AEq + CEq, id eſt [3]) ACq; itemque [4]

[4] per 7 *ſecundi.* GMq ∞ (BEq + CEq, id eſt [5]) BCq. Cumque propterea

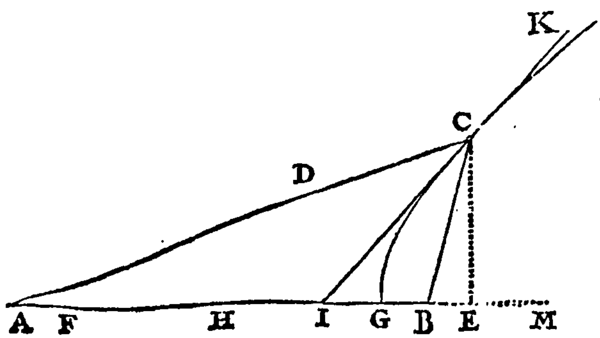
[5] per 47 *primi.* FM ſit ∞ AC; & GM ∞ BC; ſitque ipſarum FM & GM differentia FG, manifeſtum eſt ipſarum quoque AC & BC majorem ſuperare minorem, ejuſdem FG, nempe axis tranſverſi, longitudine. Quod demonſtrandum erat.

Corollarium 2.

Ductis à quolibet Hyperbolæ puncto ad utrumque Vmbilicum rectis, quæ angulum iis comprehenſum biſariam dividit linea curvam in eodem puncto contingit; & converſim.

Si enim quæ angulum ACB biſariam dividit recta ICK non contingat Hyperbolam in C puncto, ſecet eandem, ſi fieri poteſt,

Fig. 1.

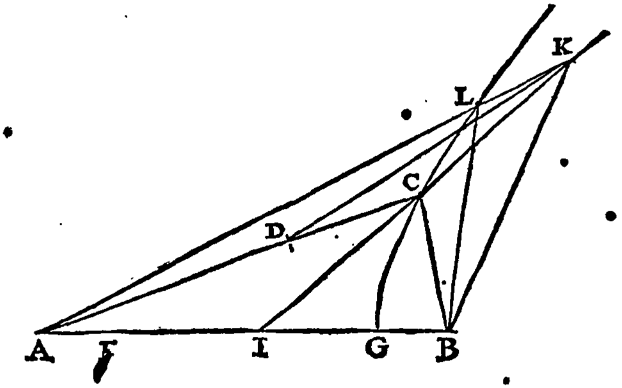


atque ita ſaltem aliquo ſui puncto, veluti K, intra Hyperbolam ſit.

Tum

Tum ductis KB, KD, & KA (quarum poſterior Hyperbolam ſecet in L, à quo ad B ducta ſit BL), cum in triangulis DCK, BCK latera DC, CK lateribus BC, CK utrumque utrique,

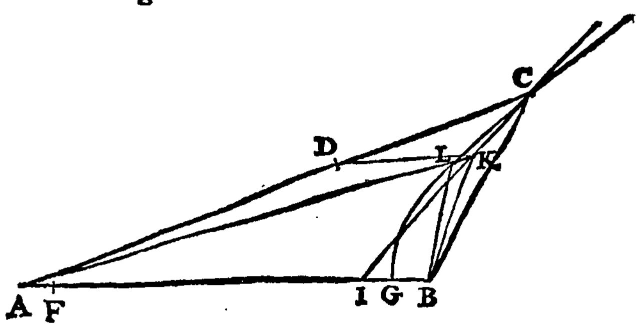
Fig. II.



circa[1] æquales angulos, æqualia ſint, erit quoque baſis DK baſi BK æqualis. Cumque porrò, juxta Corollarium præcedens, AL ipſam LB, ideoque & AK rectas BL, LK, ſimul ſumptas, ſuperet intervallo AD; ſitque BK, ideoque & KD, ipſis BL, LK ſimul ſumptis minor: per conſequens AK eandem KD majori longitudine quàm eſt AD excedet, id eſt, ipſa AK binis re-

[1] Cum enim ex hypotheſi anguli ACI & BCI æquales ponantur, erunt quoque anguli ACK & BCK, qui ipſis ſunt deinceps, per 13 primi æquales.

Fig. III.



ctis KD, DA ſimul ſumptis major erit. Quod cum abſurdiſſimum ſit[2], non ſecat Hyperbolam recta ICK, ſed eandem contingit in C puncto. Cumque non poſſit in eodem puncto C alia

[2] *per* 20 *primi.*

recta,

[1] per 3. Corol. 6 primi hujus.

recta Hyperbolam contingere quàm I C K [1], manifeſtum eſt converſim, eam, quæ Hyperbolam in C contingit, angulum quoque A B C bifariam dividere.

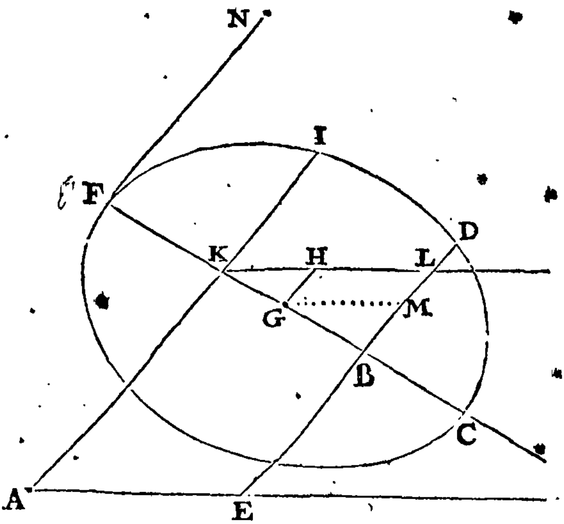
Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis XIV.

Si æquatio ſit $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy \infty - xx + dx + kk$, aſſumpto juxta Regulam $z \infty y - c + \frac{bx}{a}$, hoc eſt, $y \infty z + c - \frac{bx}{a}$, eoque ſubſtituto in locum ipſius y, ejuſdemque quadrato loco yy, ſublatisque iis, quæ ſe invicem deſtruunt, erit $zz - \frac{bbxx}{aa} + \frac{2bcx}{a} - cc \infty - xx + dx + kk$. id eſt, factâ decenti tranſpoſitione, erit $zz \infty - xx + \frac{bbxx}{aa} + dx - \frac{2bcx}{a} + cc + kk$ ſive $zz \infty \frac{-aaxx + bbxx}{aa} + \frac{dax - 2bcx}{a} + cc + kk$. Suppoſito autem a majore quàm b, ac multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviſo per $aa - bb$, ut quantitas xx abſque fractione inveniatur, erit $\frac{aazz}{aa-bb} \infty - xx \frac{+daax - 2bacx}{aa-bb} + \frac{ccaa + kkaa}{aa-bb}$. Iam verò ſi facilioris operationis gratiâ loco $\frac{daa - 2bac}{aa-bb}$ ſubſtituatur $2h$: erit æquatio $\frac{aazz}{aa-bb} \infty - xx + 2hx + \frac{ccaa+kkaa}{aa-bb}$, aut $\frac{aazz}{aa-bb} + xx - 2hx \infty \frac{ccaa+kkaa}{aa-bb}$.

Hinc ſi juxta Regulam aſſumatur $v \infty x - h$ ſive $x \infty v + h$, atque hoc in locum ipſius x, ejusque quadratum loco xx ſubſtituatur, ac expungantur quæ ſe invicem deſtruunt, habebitur $\frac{aazz}{aa-bb} + vv - hh \infty \frac{ccaa+kkaa}{aa-bb}$. Hoc eſt, factâ decenti tranſpoſitione, erit $\frac{aazz}{aa-bb} \infty - vv + hh + \frac{ccaa+kkaa}{aa-bb}$. Atque ita apparet æquationem eſſe reductam ad formulam Theorematis X I V, ideoque Locum quæſitum aut Ellipſin aut Circuli circumferentiam exiſtere. Rurſus verò facilioris operationis ergo loco $\frac{aa}{aa-bb}$ ſcribatur $\frac{l}{g}$, & loco $hh + \frac{ccaa+kkaa}{aa-bb}$ ſcribatur ff, ita ut æquatio ſit talis $\frac{lzz}{g} \infty ff - vv$.

Ad

Ad peculiarem autem prædicti Loci determinationem ac deſcriptionem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile A punctum, atque eadem x ſe in linea A E ab A versùs E indefinitè extendere intelligatur, ſitque angulus datus vel aſſumptus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A K vel ejuſdem ad duos rectos complemento. Hinc quoniam $z \propto y - c + \frac{bx}{a}$, ſi y ſupra lineam A E exſurgere intelligatur, ducenda quoque eſt ſupra ipſam recta K L eidem parallela, ita ut pars rectæ A K omniumque ipſi æquidiſtantium inter prædictas A E & K L intercepta, veluti A K,



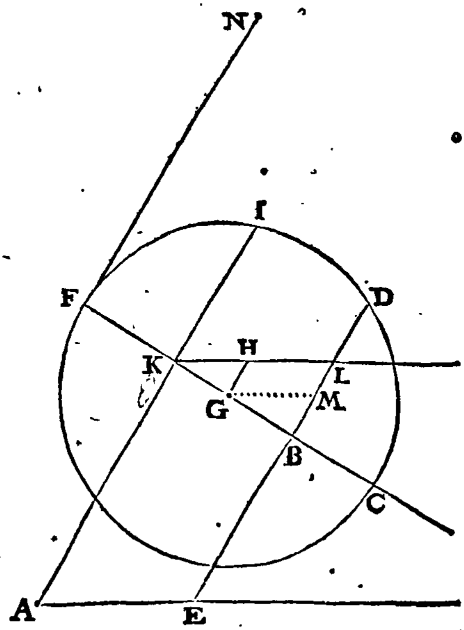
E L, &c. æquetur c cognitæ: ac deinde per punctum K infra rectam K L ducenda eſt recta K B in tali angulo, ut rectarum omnium ipſi A K parallelarum partes, quæ inter K L & K B intercipiuntur (veluti L B) ad partes ipſius K L, inter eaſdem parallelas & punctum K interceptas (ut verbi gratiâ L K) eandem habeant rationem, quæ eſt inter b & a, hoc eſt, ut ſit uti a ad b, ita K L ad L B. Atque ita poſitâ K L ſive A E, indefinitè ſumptâ, $\propto x$, L B omneſque ipſi parallelæ inter K L & K B interceptæ erunt $\frac{bx}{a}$. Vnde ex prædictis conſtat diametrum fore in recta K B,

ad quam ordinatim applicatæ ſint ipſi A K æquidiſtantes. Iam verò cum v ſit ∞ $x - h$, à recta K L ſive A E auferenda eſt K H, ita ut eadem K H ſit ∞ h, ideoque H L indefinitè quoque ſumpta ∞ $x - h$ ſeu v. Deinde per punctum H ducenda eſt H G ipſi A K parallela, ſecans inventam diametrum in G, eritque idem interſectionis punctum G quæſitæ Ellipſeos centrum. Porrò quoniam ſimilium triangulorum K H G & K L B nota eſt ratio lateris K H ad H G ſive K L ad L B, ut & angulus ſub iiſdem lateribus contentus, utpote æqualis angulo dato vel aſſumpto E A K, erit quoque nota ratio lateris K H ad latus K G ſive K L ad K B, quæ ponatur ut a cognitæ ad e itidem cognitam. Ideoque cum H L ſive G M, quæ ipſi H L parallela intelligitur, indeterminatè ſumpta ſit ∞ v, erit G B, ſimiliter indeterminatè ſumpta, hoc eſt, quælibet diametri portio inter centrum & quamlibet ordinatim applicatam intercepta, ∞ $\frac{ev}{a}$. Cujus quidem interceptæ quadratum cum in formula Theorematis XIV. ultimum æquationis terminum conſtituat, æquatio ſupra expoſito modo ita reducatur, ut terminus ejus extremus fiat $\frac{eevv}{aa}$, id quod factum erit, ſi ſinguli æquationis termini multiplicentur per ee, productumque dividatur per aa. inde enim ſequenti modo ſe habebit æquatio $\frac{leezz}{gaa} \infty \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$. Hinc ſi juxta Regulam ſemi-latus tranſverſum G F vel G C fiat $\infty \sqrt{\frac{eeff}{aa}}$, id eſt, $\frac{ef}{a}$, & ratio tranſverſi lateris C F ad rectum latus F N, ut lee ad gaa, iiſdemque lateribus, ac diametro, centroque, modò inventis, Ellipſis deſcribatur F D C, ſecans rectam A E vel A K productam in I: erit curva I D C Locus quæſitus.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipſi A K parallelâ, ac ſi opus ſit productâ ut ſecet rectas K L & K B in L & B, ſi eadem D E vocetur y, erit D B, hoc eſt, D E $-$ E L $+$ L B ∞ $y - c + \frac{bx}{a}$ ſeu z. Eſt autem ut jam annotatum eſt G B ∞ $\frac{ev}{a}$, atque ex conſtructione G F vel G C ∞ $\frac{ef}{a}$, ideoque F B ∞ $\frac{ef}{a} + \frac{ev}{a}$, & B C ∞ $\frac{ef}{a} - \frac{ev}{a}$, ac rectangulum F B C ∞ $\frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$. Hinc cum ex natura Ellipſis ſit ut N F ad F C, hoc eſt,

ut

ut gaa ad lee, ita D B quadratum, hoc eſt, zz ad prædictum rectangulum F B C; erit $\frac{leezz}{gaa} \infty \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$, id eſt, multiplicatis omnibus per aa, ac diviſis per ee, erit $\frac{lzz}{g} \infty ff - vv$, ideoque reſtituto $x - h$ loco v, atque $hh + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$ loco ff, ut & $\frac{aa}{aa - bb}$ loco $\frac{l}{g}$, erit $\frac{aazz}{aa - bb} \infty hh + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb} - xx + 2hx - hh$, hoc eſt, $\frac{aazz}{aa - bb} + xx - 2hx \infty \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Porrò reſtituto $\frac{daa - 2bca}{aa - bb}$ loco $2h$, fiet $\frac{aazz}{aa - bb} + xx \frac{-daax + 2bcax}{aa - bb} \infty$



$\frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$, id eſt, factâ multiplicatione per $aa - bb$ ac diviſione per aa, erit $zz + xx - \frac{bbxx}{aa} - dx + \frac{2bcx}{a} \infty cc + kk$.

Ac denique loco z factâ reſtitutione ipſius $y - c + \frac{bx}{a}$, deletisque iis quæ ſe invicem tollunt, ac omnibus ritè ordinatis, obtinebitur $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy \infty - xx + dx + kk$. Quod determinandum ac demonſtrandum erat.

Notandum porrò hîc eſt, quòd ſi angulus A K B foret rectus, ac proinde ordinatim applicatæ, ut D B, K I, &c. ad diametrum K B perpendiculares, ac ſimul F N æqualis F C, prædictam curvam fore Circulum, quemadmodum ex elementis perſpicuum eſt.

PROBLEMA III.

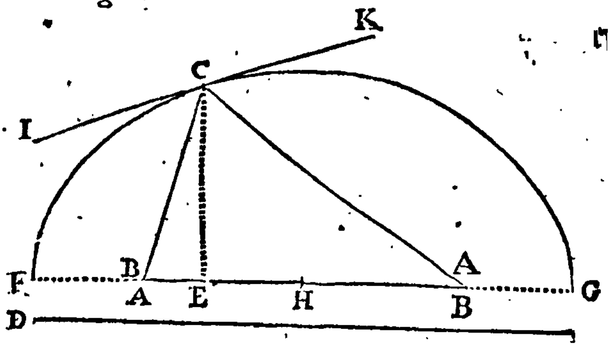
Propoſitio 17.

Datis duobus punctis tertium invenire, à quo ad bina data ductæ rectæ lineæ ſimul ſumptæ datæ longitudini æquales ſint; locumque determinare ac deſcribere, quem quæſitum punctum contingat.

Sint data duo puncta A & B, oporteatque invenire tertium, utputa C; ita nempe, ut ductæ rectæ C A, C B ſimul ſumptæ æquales ſint datæ rectæ lineæ D.

Quoniam in quæſtione angulus datus non eſt, quò facilior ſit operatio, aſſumatur rectus; ideoque à puncto C in rectam A B, quæ data puncta conjungit, productam, ſi opùs fuerit,

Fig. I.



intelligatur demiſſa perpendicularis, ut C E. Tum ſuppoſitis, juxta Regulam, A E & E C incognitis atque indeterminatis aſſumptum angulum rectum A E C comprehendentibus tanquam cognitis ac determinatis, earum prior, nimirum A E, vocetur x, ac poſterior, nempe E C, nominetur y; ipſa autem A B ſeu datorum punctorum diſtantia cognita appelletur a, & data D exprimatur per b. Hinc cum B E ſive (ſi punctum E cadat inter A & B) A B — A E, aut (ſi punctum B inter A & E cadat) A E — A B ſit $\infty\ a = x$; atque A C $\infty \sqrt{xx + yy}$; & C B ∞ $\sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$; ſitque D — A C ∞ C B: æquatio erit $b - \sqrt{xx + yy} \infty \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$; factâque operatione

ne decenti, ut utraque æquationis pars à ſigno radicali liberetur, & tranſpoſitis tranſponendis, erit

$4bbxx - 4aaxx - 4bbax + 4a^3x \infty b^4 - 2bbaa + a^4 - 4bbyy$, hoc eſt, factâ diviſione per $4bb - 4aa$, erit

$xx - ax \infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa - \frac{bbyy}{bb - aa}$. Aſſumpto deinde juxta Regulam $v \infty x - \frac{1}{2}a$, erit $x \infty v + \frac{1}{2}a$, eâque ſubſtitutâ in locum ipſius x, ejuſdemque quadrato loco xx, expunctiſque iis quæ ſe invicem deſtruunt: erit $xx \infty \frac{1}{4}bb - \frac{bbyy}{bb - aa}$, ſive $\frac{bbyy}{bb - aa} \infty \frac{1}{4}bb - xx$. Qui quidem caſus eſt Theorematis 13[tii], ac proinde Locus quæſitus Ellipſis. Cumque v aſſumpta ſit pro $x - \frac{1}{2}a$, ſi ab A verſus E ſumatur A H $\infty \frac{1}{2}a$: erit, juxta Regulam, H centrum, & ſemi-diameter tranſverſa (velut H F ab una, & H G ab altera parte) $\infty \frac{1}{2}b$; ita ut diameter tranſverſa F G (quæ quidem, ob applicatam C E ad eandem perpendicularem, tranſverſus quoque axis eſt) ſit ∞b. Ratio autem tranſverſæ diametri ad parametrum, ſeu quadrati tranſverſæ ad quadratum ſecundæ diametri erit, ut bb ad $bb - aa$. Vnde per ea, quæ Capitibus tertio & ultimo libri primi expoſita ſunt, quæſita Ellipſis facillimè deſcribetur. Porrò cum quadratum ſemi-diametri tranſverſæ ſit $\infty \frac{1}{4}bb$, erit quadratum ſemi-ſecundæ diametri $\infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$. Atqui cum F B ſeu G A ſit $\infty \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$, & B G ſeu A F $\infty \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, erit quoque rectangulum F B G ſeu G A F $\infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$, nempe æquale quadrato ſemi-ſecundæ diametri, ſive, ut Veteres loquebantur, *æquale quadranti figuræ ad tranſverſum axem factæ*. Ideoque puncta A & B ea ipſa ſunt, quæ vulgò Ellipſeos Foci ſive Vmbilici nuncupantur. Vnde apparet, ex præmiſſis rectè inferri, quæ ſequuntur.

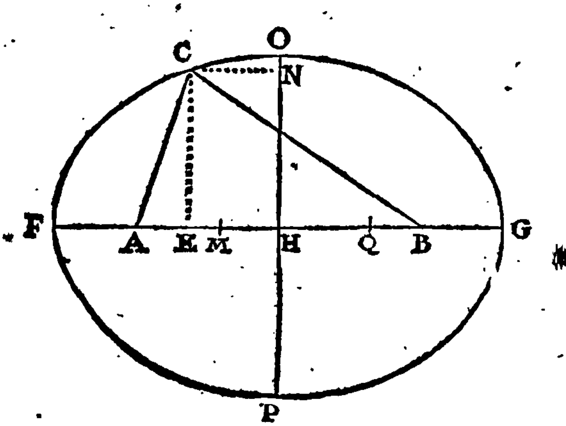
Corollarium I.

Quæ à quolibet in Ellipſi puncto ad utrumque Vmbilicum rectæ ducuntur, ſimul ſumptæ tranſverſo axi æquales ſunt.

Quemadmodum autem in Hyperbola ſuperiùs demonſtratum eſt, ductarum C A, C B differentiam tranſverſo axi F G æquari, ita & hîc earum aggregatum eidem tranſverſo axi æquale eſſe oſtendetur, nempe, ſi non per additionem & compoſitionem, ut

ut ibidem factum eſt, ſed per ſubductionem & diviſionem argumentatio inſtituatur. Quod ipſum tamen, adhibitâ nonnullâ mutatione, elegantiùs quoque in hunc modum abſolvi poſſe videtur.

Eſto quælibet Ellipſis F C G, cujus centrum H, axis major F G, minor O P, atque Vmbilici A & B; adeoque rectangulum F B G ut & G A F æquale quadrato ſemi-ſecundæ diametri H O.



Ductis ab aſſumpto quolibet curvæ puncto C rectis C A, C B, ordinatim ad utrumque axem applicentur C E, C N; & fiat ut H F ad H A, ita H E ad H M, adeò ut [1] A H E rectangulo æquale ſit rectangulum F H M; ſumaturque H Q æqualis ipſi H E. Hinc cum ſit [2] ut H F *q* ad H A *q*, ita H E *q* ad H M *q*, erit quoque per converſionem rationis ut H F *q* ad G A F ſeu [3] H O *q*, id eſt [4], ut C N *q* ſive H E *q* ad O N P, ita idem H E *q* ad E M Q; ac proinde [5] æqualia ſunt rectangula O N P & E M Q. Quocirca cum [6] H M *q* unà cum E M Q, id eſt, cum O N P rectangulo, æquale ſit H E *q*; ſitque & H F *q* [7] æquale quadratis rectarum H A & (H O [8] ſeu [9]) C E unà cum rectangulo O N P: erunt H M *q* + O N P + H F *q* æqualia H E *q* + H A *q* + C E *q* + O N P. Ac proinde ſi utrinque auferatur O N P rectangulum, remanebunt bina quadrata rectarum H M & H F ſeu H G ſimul æqualia tribus quadratis rectarum H E, H A ſeu H B, & C E.

Hinc

[1] *per 16 ſexti.* [2] *per 22 ſexti.* [3] *ex hypotheſi.* [4] *per 13 primi hujus ejuſque Corol. 1* [5] *per 9 quinti.* [6] *per 5 ſecundi.* [7] *per 5 ſecundi.* [8] quippe quadr. ex H O æquale eſt G A F rectang. ex hypoth. [9] *per 5 ſecundi.*

Hinc additis ablatiſvè ab utraque æquationis parte æqualibus, nimirum F H M ſeu G H M bis ab una, & A H E ſeu B H E bis ab altera parte: erit [1] F M q æquale (A E q + C E q, id eſt [2],) A C q: itemque [3] G M q æquale (B E q + C E q, id eſt [4],) B C q. Cumque propterea recta F M æquetur ipſi A C, & G M ipſi B C: erit ipſarum A C & B C aggregatum tranſverſo axi F G æquale. Quod demonſtrandum erat.

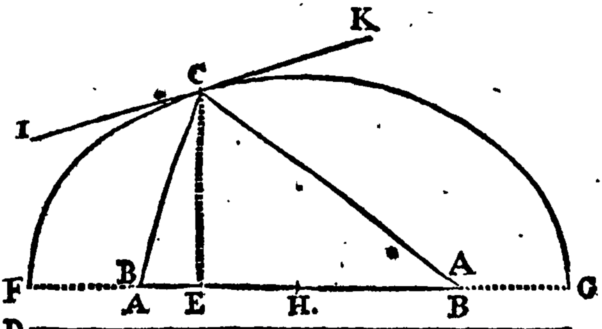
[1] per 7 ſecundi.
[2] per 47 primi.
[3] per 4 ſecundi.
[4] per 47 primi.

Corollarium 2.

Ductis à quolibet Ellipſeos puncto ad utrumque Vmbilicum rectis, ſi per idem illud punctum altera recta agatur, æquales cum utraque ducta angulos conſtituens, eadem curvam in dicto puncto contingit; & contra.

Si enim recta I C K ita ducta, ut æquales ſint anguli A C I, B C K, non contingat Ellipſin in C puncto, ſecet eandem, ſi fieri poteſt, in C & K. Deinde productâ A C ad L, ita ut tota A L

Fig. 1.



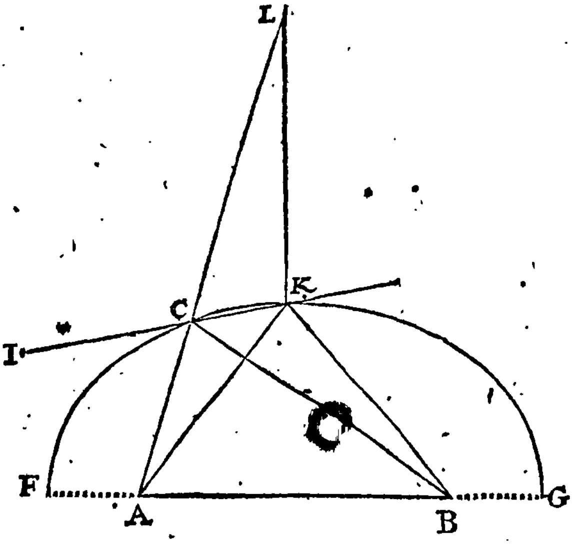
axi F G, ideoque [5] adjecta C L ipſi C B æqualis ſit, jungantur A K, B K, L K. Cum igitur, in triangulis L C K, B C K latera L C, C K lateribus B C, C K, utrumque utrique, circa æquales angulos, æqualia ſint, erit quoque baſis L K baſi B K æqualis. At verò cum punctum K in Ellipſi ſupponatur, erunt,

[5] per Corol. 1 hujus.

per

per Coroſſarium præcedens, rectæ A K, K B, hoc eſt, latera A K, K L ſimul ſumpta tranſverſo axi F G, ideoque & baſi A L

Fig 11.



æqualia, quod eſt abſurdum [1]. Non igitur ſecat recta I C K Ellipſin, ſed eandem contingit in C puncto. Cumque non poſſit in eodem puncto C alia recta Ellipſin contingere quàm I C K [2], manifeſtum eſt, è contra quoque eam, quæ Ellipſin in C contingit, efficere angulos A C I, B C K æquales.

[1] per 20 primi.
[2] per 17 primi huius.

CAPVT IV.

Regula univerſalis inveniendi ac determinandi loca quælibet plana & ſolida.

Iam verò his omnibus ita præmiſſis, pro generali Regula concludi poteſt, æquationes omnes, quæ in indagatione Locorum prædicto modo obvenire atque obtingere poſſunt, ita ut in iis neutra quantitatum incognitarum in ſe ducta, neque factum ſub iiſdem ad ſo-

liduṁ

lidum excurrat, ſed aut quadratum, aut planum non excedat, ex aliqua ſequentium formularum conſtare, vel ad earundem aliquam Methodo jam explicatâ reduci poſſe: nimirum,

1mò. $y \propto \frac{bx}{a}$, ſive, quod idem eſt, $y \propto x$: cum ſupponi poſſit eſſe $a \propto b$.
$y \propto \frac{bx}{a} \pm c$, vel $y \propto c - \frac{bx}{a}$. Signum $\pm$ ſignificat + vel —.

Sed hîc notandum, fieri etiam poſſe, ut per operationem quantitatum incognitarum altera evaneſcat, alteraque ſola notæ alicui quantitati æqualis remaneat, ſicut ſuperiùs expoſitum eſt.

2dò.
$yy \propto dx$, aut converſim $dy \propto xx$.
$yy \propto dx.ff$, aut converſim $dy.ff \propto xx$.
$zz \propto dx$, aut converſim $dy \propto vv$.
$zz \propto dx.ff$, aut converſim $dy.ff \propto vv$.

3tiâ.

	ſive etiam	
$yy \propto \frac{lxx}{g}.ff$		$yx \propto ff$
$zz \propto \frac{lxx}{g}.ff$		$zx \propto ff$
$yy \propto \frac{lvv}{g}.ff$		$yv \propto ff$
$zz \propto \frac{lvv}{g}.ff$		$zv \propto ff$

Supponendo ubique y & x eſſe quantitates indeterminatas ac primò conceptas; at verò z eſſe quantitatem aſſumptam, & quæ compoſita ſit ex $y \pm$ aliâ quâdam quantitate, vel in totum cognitâ, vel cui etiam altera incognita primùm concepta, nimirum x, permixta ſit; atque v quidem aſſumptam quoque eſſe, ſed eo caſu conſtare ſolummodo ex $x \pm$ aliâ quantitate cognitâ, abſque ulla ipſius y incognitæ quantitatis permixtione: aut contra v eſſe $\propto x \pm$ aliâ quâdam quantitate;

titate, cui & *y* incognita permixta eſſe poſſit atque eo quidem caſu *z* ex *y* & aliâ quantitate in totum cognitâ conſtare.

Et ſi æquatio ſimilis ſit alicui formularum ſub N° 1. comprehenſarum, erit Locus quæſitus Linea Recta; ſub N° 2. Parabola; & ſub N° 3. ſecundùm ſignorum angulorumque varietatem vel Hyperbola, vel Ellipſis, vel Circulus.

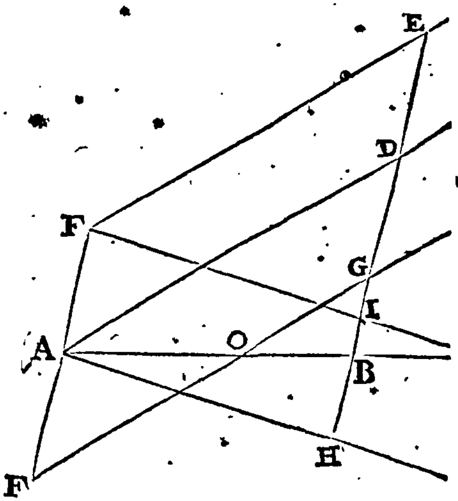
Vt autem prædicta Loca ſpecificè determinentur ſive prædictæ Lineæ in plano Geometricè deſcribantur, ſciendum eſt, aliquod debere præſupponi punctum, ut & aliquam lineam à quo exordium ſumat, & per quam indefinitè ſe extendere intelligatur altera incognitarum quantitatum primò conceptarum; itemque angulum quendam eſſe præſupponendum, quem dictæ quantitates incognitæ conſtituant in puncto, in quo ſibi invicem junctæ intelliguntur.

Sit itaque in appoſita figurâ, ut & in ſequentibus omnibus, prædictum punctum A, dictaque linea A B, à quo, & per quam quantitas *x* ſe indefinitè extendere concipiatur; atque angulus A B E, quem faciunt quantitates *y* & *x*, in puncto B ſibi invicem junctæ.

Et primò quidem caſu, cùm Locus quæſitus eſt Linea recta, nimirum, æquatione exiſtente $y \infty x$ vel $y \infty \frac{bx}{a}$, ipſum A punctum erit initium dictæ lineæ, atque ut eadem ſpecificè deſcribatur ſumendum eſt in linea A B punctum utcunque, exempli gratiâ, B, ac per illud ductâ rectâ, velut H B E, ita ut angulus A B E præſuppoſito vel concepto angulo ſit æqualis, ſi in eadem recta ſumatur punctum, veluti D; ita ut A B & B D ſint æquales, vel ut A B ſit ad B D, ſicut *a* ad *b*, atque ex A per punctum D ducatur recta A D: erit eadem A D indefinitè extenſa Locus quæſitus. At ſi in æquatione inveniatur quoque terminus *c*, ac ipſe quidem ſigno + affectus ſit, ducenda eſt è puncto A ad eandem partem lineæ A B quàm eſt punctum E, aut ſi ſigno — adficiatur ab altera parte, recta A F ipſi H B E parallela atque æqualis *c* cognitæ; ductâque F E vel F G, quæ rectam A B ſecet in O, ipſi A D parallelâ: erit F E vel O G indefinitè producta Locus quæſitus.

Sed

Sed ſi æquatio ſit $y \infty c - \frac{bx}{a}$, in dicta linea HBE ſumendum eſt ab altera parte lineæ AB, quâ datus vel aſſumptus angulus ABE exiſtit, punctum H, ita ut AB ad BH ſit, ſicut a ad b; ductâque AH, ex prædicto puncto F ab oppoſita parte lineæ AB, quâ ſum-

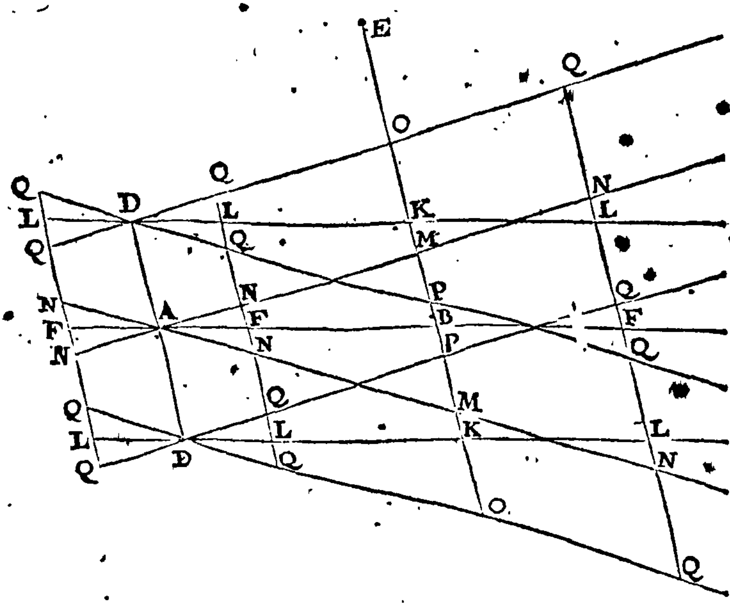


ptum eſt punctum H, ducenda eſt FI ipſi AH parallela: eritque eadem FI producta donec cum linea AB coïncidat Locus quæſitus.

Etenim, cum tam AB quàm BD ſit ∞x, aut AB ad BD ab una, ut & AB ad BH ab altera parte, ſit ut a ad b; ac proinde BD vel BH $\infty \frac{bx}{a}$: itemque, cum AF ſeu DE vel DG ut & HI ſint æquales c cognitæ: erit BE ſive BD + DE $\infty \frac{bx}{a} + c$, & BG ſive BD — DG $\infty \frac{bx}{a} - c$, ac BI ſive HI — HB $\infty c - \frac{bx}{a}$. Vnde cum punctum B ſumptum ſit utcunque, eadem erit de omnibus aliis, in linea AB, prædictiſve locis, aſſumptis punctis demonſtratio: atque ita patet prædictas lineas AD, FE, FG, & FI eſſe Loca quæſita. Quod determinandum, demonſtrandumque erat.

At verò ſi juxta formulas ſub N°. 2 exhibitas Locus quæſitus ſit linea Parabolica, erit

I. Primo caſu, quando æquatio eſt $yy \infty dx$, ipſa A B Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel aſſumpto angulo A B E æquales, àtque ejuſdem vertex A punctum.



II. Secundo caſu poſitâ æquatione $yy \infty dx . ff$, manente diametro in eadem linea A B, ſumptâque, ut in ſequenti figura, A F $\infty \frac{ff}{d}$, erit ejuſdem vertex in puncto F. Quod quidem punctum F, ſi uterque terminus tam dx quàm ff ſigno + ſit affectus, ab altera parte puncti A, quà eſt punctum B, ſumendum eſt; ſed ſi vel terminus dx, vel terminus ff ſigno — affectus ſit, ab eadem parte puncti A, quâ eſt punctum B, ſumi debet: & quidem ſi terminus dx ſigno + affectus ſit, ab A versùs B Parabola deſcribenda eſt; ſin contra terminus dx ſigno — affectus fuerit, in contrariam partem, ab F nempe versùs A, deſcribi debet.

At

At ſi æquatio ſit $zz \infty dx$, vel $zz \infty dxff$, cum z non ſit quantitas primò concepta ſed aſſumpta, vel aſſumpta erit pro $y \; 8 \; c$, vel pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a}$, vel denique pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a} \; 8 \; c$.

III. Et ſi quidem z aſſumpta ſit pro $y \; 8 \; c$, qui ſit caſus tertius, ducenda eſt per punctum A recta AD ipſi BE parallela atque $\infty \; c$; ita ut, ſi z aſſumpta ſit pro $y - c$, punctum D cadat ad eandem partem lineæ AB, quam conceptus eſt angulus ABE: Et, ſi z ſit aſſumpta pro $y + c$, punctum D è contra ad alteram partem lineæ AB cadat. Deinde ductâ DK ipſi AB parallelâ, erit in eadem DK Parabolæ diameter, & D vertex, ſi æquatio ſit $zz \infty dx$.

IV. Sed ſi ſit $zz \infty dx . ff$, qui ſit quartus caſus, ſumptâ DL $\infty \frac{ff}{d}$, erit vertex punctum L; quod quidem pro terminorum dx & ff per $+$ vel $-$ affectione eodem modo, ut ſupra de puncto F dictum eſt, vel citra vel ultra D punctum cadet; uti & vel in hanc vel in illam partem, prout terminus dx ſigno $+$ vel $-$ affectus fuerit, ipſa Parabola, ut ſupra notatum eſt, deſcribi debet: eritque omnibus & ſingulis prædictis quatuor caſibus Parameter $\infty \; d$.

V. Si verò z aſſumpta ſit pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a}$, qui caſus ſit quintus, ſumpto in linea BE puncto M, ita ut ſit AB ad BM, ſicut a ad b, (quod quidem punctum M ſumendum eſt ab eadem parte lineæ AB, quâ conceptus eſt angulus ABE, ſi habeatur $- \frac{bx}{a}$, ſed ab altera parte, ſi habeatur $+ \frac{bx}{a}$) ducenda eſt per puncta A & M recta AM: eritque AM eo caſu Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos angulo AME æquales, & ſi in æquatione terminus ff deficiat aut nullus ſit, erit vertex in puncto A.

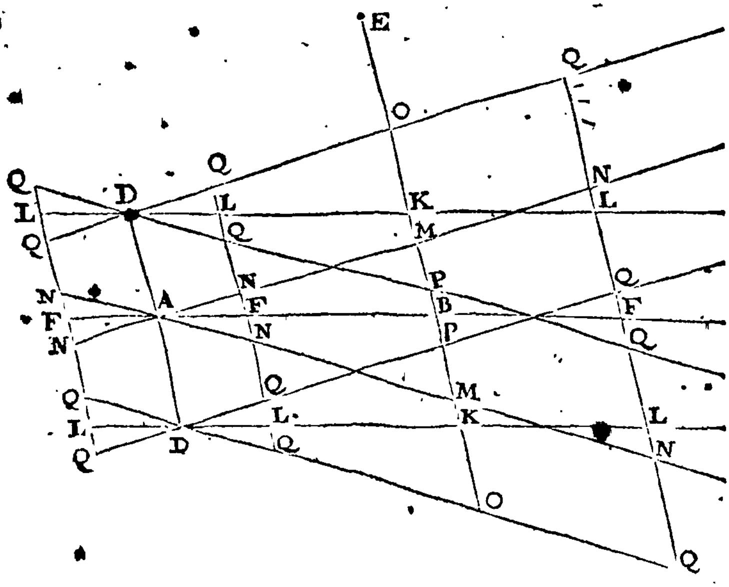
VI. Sin minus, qui ſit caſus ſextus, ductis per puncta F & L rectis LFL, quæ interſecent ſupra dictas diametros AM vel iis in directum adjunctas in punctis N: erit vertex in N, vel citra, vel ultra A punctum cadens, prout termini dx & ff in æquatione vel ſigno $+$ vel ſigno $-$ affecti fuerint; uti & vel in hanc vel in illam partem ipſa Parabola pro varia termini dx affectione, ut ſupra notatum eſt, deſcribenda erit.

 Si

Si denique z aſſumpta ſit pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a} \; 8 \; c$, ductâ, ut modò expoſitum fuit, A D ∞ c, ex puncto D (quod pro quantitatis c per ſignum + vel — affectione, ut ſupra, vel ab hac, vel ab illa parte lineæ A B ſumi debet) ducenda eſt recta D O ipſi

VII. A M, quæ eſt ad eandem partem, parallela, ſi termini $\frac{bx}{a}$ & c eodem ſigno ſint affecti, qui caſus ſit ſeptimus.

VIII. At ſi diverſo, qui ſit caſus octavus, ducenda eſt recta D P parallela ipſi A M, quæ eſt ab adverſa parte lineæ A B, atque eadem D O vel D P ſumenda eſt pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos angulo D O E vel D P E æquales: eritque vertex punctum D, ſi terminus ff in æquatione deficiat.



IX. Sin minùs, qui ſit caſus nonus, erit idem vertex ipſarum D O vel D P diametrorum & linearum L F L communis interſectio, videlicet punctum Q, quodque iterum pro terminorum dx & ff per ſignum + vel — affectione vel citra vel ultra D punctum cadit; quemadmodum & ipſa Parabola vel verſùs hanc

hanc vel verſùs illam partem pro diverſa termini dx affectione, ut ſupra eſt notatum, deſcribenda eſt: Ac poſtremis quidem iſtis quinque caſibus jam explicatis Parameter erit ad d cognitam, ſicut A B ad A M, hoc eſt, erit ut A M ad A B, ita d ad Parametrum.

Quorum quidem omnium demonſtratio perfacilis eſt. Intelligantur enim Parabolæ prædictis diametris ac parametris deſcriptæ, quæ per annotatos vertices tranſeant, ſitque ordinatim ad eaſdem diametros applicatarum aliqua in recta O E utcunque ſumpta, & ſupponatur eaſdem Parabolas prædictam applicatam ſecare in E puncto: & primo caſu, cum pars diametri A B inter verticem A & quamlibet ad eandem diametrum applicatam intercepta, veluti A B, concipiatur, ut x, ac ſingulæ illæ applicatæ, ut y; ſitque Parameter $\propto d$, atque ex natura Parabolæ [1] rectangulum ſub dicta Parametro & re- [1] per 1 primi hujus.
1. cta A B contentum ſit $\propto$ B E quadrato: erit $dx \propto yy$.

Secundo caſu, ubi vertex eſt in puncto F cum triplici diſtinctione, ut ſupra monitum eſt, notandum primò venit, in caſibus, ubi æquatio eſt $yy \propto dx \pm ff$, punctum B in linea F B ab A verſùs B indefinite ſumi poſſe: cum iſtis caſibus ab A verſùs B Parabolam deſcribendam eſſe ſupra annotatum ſit; At verò caſu, ubi æquatio eſt $yy \propto ff - dx$, cum juxta Regulam Parabola in contrariam partem ab F verſùs A ſit deſcribenda, punctum B non niſi inter F & A aſſumendum eſſe. id quod etiam ex ipſa æquatione manifeſtum eſt. Quoniam enim in prædicta æquatione $yy \propto ff - dx$ ſive quod idem eſt $ff - yy \propto dx$, terminus ff major eſt quàm dx, utpote eundem excedens quantitate yy; idcirco quoque ſi utrinque diviſio fiat per d, $\frac{ff}{d}$ majus erit quàm x. Quare cum ſecundum Regulam $\frac{ff}{d}$ æquetur rectæ A F, & $x \propto$ rectæ A B, erit ſimiliter recta A F major quàm A B: ideoque B punctum inter A & F puncta, ſicut dictum eſt, cadet, id quod ad caſus quoque ſequentes applicatum eſto. Porrò quoniam A F eſt $\propto \frac{ff}{d}$, erit F B (hoc eſt, obſervatâ triplici diſtinctione, ut prædictum eſt, A B $\pm$ A F, atque etiam A F — A B) æqualis $x \pm \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - x$; eâque multiplicatâ per parametrum d, fit rectangulum $dx \pm ff$,

atque

atque etiam $ff - dx$. quod æquale eſt quadrato applicatæ B E
2. ſive yy, ac proinde $yy \infty dx \pm ff$, atque $yy \infty ff - dx$.

Tertio caſu, ubi vertex eſt in puncto D, ac diameter in recta D K, quoniam A D ſeu B K eſt ∞c: erit K E, hoc eſt, B E — B K $\infty y - c$; & K B E, hoc eſt, B E + B K $\infty y + c$. Cumque eo caſu z aſſumpta ſit pro $y \pm c$, erit K E & K B E ∞z. Eſt autem D K ſeu A B ∞x, parameterque ∞d, & rectangulum ſub dicta Parametro & recta D K contentum ∞ quadrato ex K E vel K B E. Quare cum hoc quadratum ſit ∞zz, atque
3. rectangulum illud ∞dx, erit $zz \infty dx$.

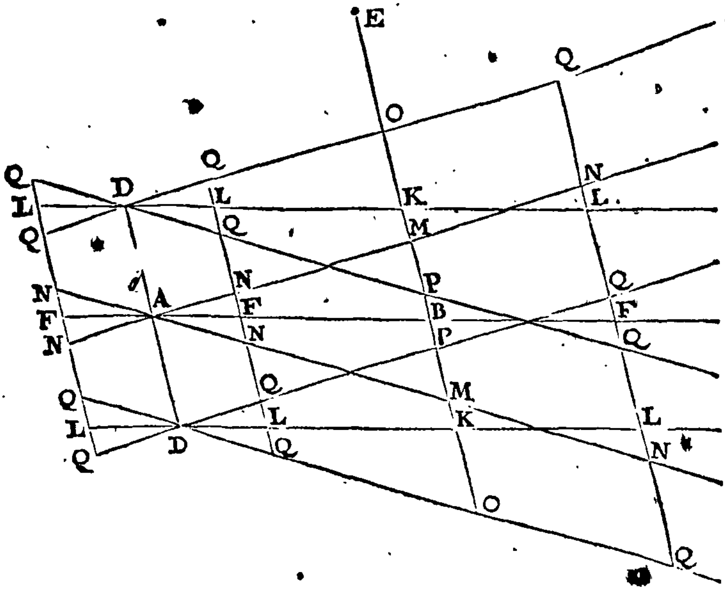
Quarto caſu, ubi manente diametro in recta D K vertex eſt in puncto L, quoniam D L ſive A F eſt $\infty \frac{ff}{d}$, erit L K (hoc eſt, obſervatâ triplici diſtinctione juxta Regulam, D K $\pm$ D L, atque etiam L D — D K) æqualis $x \pm \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - x$. quâ multiplicatâ per Parametrum d, fit rectangulum $dx \pm ff$, atque etiam $ff - dx$. quod æquale eſt quadrato applicatæ K E vel K B E, hoc eſt, zz: eritque proinde $zz \infty dx \pm ff$, atque
4. $zz \infty ff - dx$.

Quinto caſu, ubi vertex eſt in puncto A, diameterque in recta A M, cum ſit ut a ad b, ita A B, hoc eſt, x, ad B M: erit B M $\infty \frac{bx}{a}$, ideoque M E, hoc eſt, B E — B M $\infty y - \frac{bx}{a}$, & M B E, hoc eſt, B E + B M $\infty y + \frac{bx}{a}$. Et quoniam eo caſu z aſſumpta eſt pro $y \pm \frac{bx}{a}$, erit M E & M B E ∞z. At cum in triangulo A B M cognita ſint & angulus A B M, & ratio laterum A B, B M, dictum angulum comprehendentium, nota quoque eſt ratio reliquorum dicti trianguli laterum ad invicem, atque in ſpecie etiam lateris A B ad A M, quæ ſit ut a ad e. Ac proinde cum ſit ut a ad e, ita A B, h.e., x ad A M: erit A M $\infty \frac{ex}{a}$. Cumque porrò juxta Regulam eo caſu ſit ut A M ad A B, hoc eſt, ut e ad d, ita d ad Parametrum: erit Parameter $\infty \frac{ad}{e}$. Quâ multiplicatâ per A M ſeu $\frac{ex}{a}$ fiet rectangulum ∞dx. Quod æquale eſt quadrato applicatæ M E vel M B E, hoc eſt, zz; ac proin-
5. de eſt $zz \infty dx$.

per 6 ſexti.

Sexto

Sexto caſu, ubi vertex eſt in puncto N, & diameter in recta N M, quoniam eſt ut A B ad A M, ita A F ad A N, hoc eſt, ut a ad e, ita $\frac{ff}{d}$ ad A N: erit A N ∞ $\frac{eff}{ad}$, & N M (hoc eſt, obſervatâ juxta Regulam triplici diſtinctione, A M 8 A N, atque etiam N A — A M) æqualis $\frac{ex}{a}$ 8 $\frac{eff}{ad}$; atque etiam $\frac{eff}{ad} - \frac{ex}{a}$. Quâ multiplicatâ per Parametrum $\frac{ad}{e}$, fit rectangu-



lum dx 8 ff, atque etiam $ff - dx$. Quod cum æquale ſit quadrato applicatæ M E vel M B E, hoc eſt, zz: erit

6\. zz ∞ dx 8 ff, atque zz ∞ $ff - dx$.

Septimo caſu, ubi vertex eſt in puncto D, & diameter in recta D O, quoniam A D ſeu M O eſt ∞ c, erit O E (ſive B E — B M — M O) ∞ $y - \frac{bx}{a} - c$, & O B E (ſive B E + B M + M O) ∞ $y + \frac{bx}{a} + c$. Cumque eo caſu z aſſumptâ ſit pro $y - \frac{bx}{a} - d$, vel pro $y + \frac{bx}{a} + d$: erit O E & O B E ∞ z. Porrò cum D O

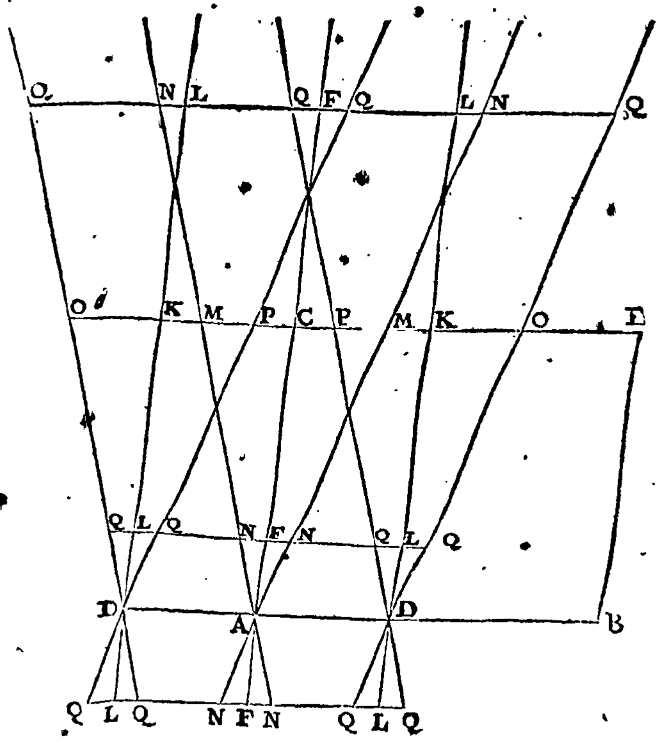
ſeu A M ſit $\infty \frac{ex}{a}$, Parameterque ſectionis $\infty \frac{ad}{e}$, erit rectangulum ſub Parametro & recta D O contentum $\infty\ dx$. Cumque idem illud rectangulum æquetur quadrato applicatæ O E vel
7. O B E, id eſt, zz: erit $zz \infty dx$.

Octavo caſu, ubi, manente vertice in puncto D, diameter eſt in recta D P, quoniam A D ſeu B K eſt $\infty\ c$, & K P $\infty \frac{bx}{a}$, erit P E una (ſive B E — B K + K P) $\infty\ y - c + \frac{bx}{a}$, & P E altera (ſive B E + B K — K P) $\infty\ y + c - \frac{bx}{a}$. Cumque eo caſu z aſſumpta ſit pro $y + \frac{bx}{a} - c$ vel pro $y - \frac{bx}{a} + c$: erit utraque P E $\infty\ z$. Porrò cum D P ſeu A M ſit $\infty \frac{ex}{a}$ ac Parameter $\infty \frac{ad}{e}$, erit rectangulum ſub Parametro & recta D P contentum $\infty\ dx$. Cumque idem rectangulum æquale ſit quadrato utriuſque ap-
8. plicatæ P E, hoc eſt, zz: erit quoque $zz \infty dx$.

Nono caſu, ubi vertex eſt in puncto Q, & diameter in recta Q O vel Q P, quoniam, ut ſupra, O E eſt $\infty\ y - \frac{bx}{a} - c$, atque O B E $\infty\ y + \frac{bx}{a} + c$; at verò P E una $\infty\ y - c + \frac{bx}{a}$, ac P E altera $\infty\ y + c - \frac{bx}{a}$, ſitque eo caſu z aſſumpta pro $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$: erit O E, O B E, atque utraque P E $\infty\ z$. Et cum D O aut D P ſeu A M ſit $\infty \frac{ex}{a}$, atque D Q ſeu A N $\infty \frac{eff}{ad}$: erit Q O vel Q P (hoc eſt, obſervatâ juxta Regulam triplici diſtinctione, D O vel D P $\pm$ D Q, atque etiam Q D — D O vel D P) æqualis $\frac{ex}{a} \pm \frac{eff}{ad}$, atque etiam $\frac{eff}{ad} - \frac{ex}{a}$. Vnde ſi eadem Q O vel Q P multiplicetur per Parametrum $\infty \frac{ad}{e}$, erit rectangulum $\infty\ dx \pm ff$, atque etiam $ff - dx$. Quod quidem rectangulum cum æquale ſit quadrato applicatæ O E, O B E, aut utriuſque P E,
9. hoc eſt, zz; erit quoque $zz \infty dx \pm ff$, atque $zz \infty ff - dx$. Quæ quidem omnia ſunt, quæ hîc demonſtranda erant.

Quod autem ad æquationes ſuperioribus novem caſibus converſim correſpondentes ſpectat, ut lineæ Parabolicæ deſcribantur, quæ ſint Loca quæſita: poſitis iiſdem, ut ſupra, per pun-

punctum A ducenda eſt recta A C ipſi B E parallela, ac deinde ipſa A C, ubique conſideranda, ut conſiderata fuit recta A B in ſuperiori figura. Porrò ſumpto in eadem A C puncto utcunque, veluti C, atque per id ductâ rectâ ipſi A B parallelâ, velut O C E, erit ſimiliter hæc O C E ubique conſideranda, ſicut conſiderata fuit recta O B E in præcedenti figura, nullâ ſcilicet aliâ mutatione adhibitâ. Exempli gratiâ: Si æ-
I. quatio ſit $dy \infty xx$, erit A C diameter, A vertex, & Parame-



ter ∞d. Cum enim A C ſeu B E ſit concepta ut y, & C E ſeu A B ut x, rectangulumque ſub Parametro & A C contentum, hoc eſt, dy, æquetur quadrato rectæ C E ſeu A B, hoc eſt, xx: erit, ut petitur, $dy \infty xx$.

II. Si æquatio ſit $dy.ff \infty xx$, ſumptâ A F $\infty \frac{ff}{d}$, erit F vertex, manente diametro in recta F C, atque Parametro ∞d. Eſt

 enim

enim pro triplici juxta Regulam diſtinctione F C $\propto y \; 8 \; \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - y$: ac proinde rectangulum ſub Parametro ac eadem F C contentum $\propto dy \; 8 \; ff$, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem rectangulum cum æquale ſit quadrato applicatæ C E, hoc eſt, xx: erit, ut petitur, $dy . ff \propto xx$.

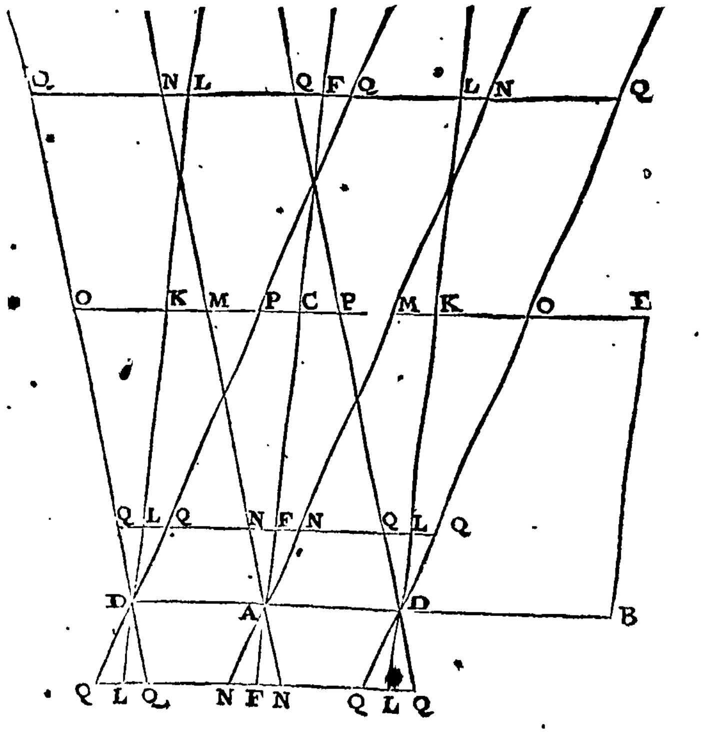
III. Si æquatio ſit $dy \propto vv$, vel $dy . ff \propto vv$, atque v primùm
aſſumpta ſit pro $x \; 8 \; c$, factâ A D $\propto c$, ſumptoque puncto D ab
A versùs B, ſi v ſit aſſumpta pro $x - c$; at contra ab altera
parte, ſi v aſſumpta fuerit pro $x + c$, erit, ductâ D K ipſi A C
parallelâ, diameter in recta D K. Et ſi terminus ff deficiat,
IV. erit vertex in D; ſin ſecus in L, cum triplici variatione, ut
ſupra expoſitum eſt. Et patet, D B ſive D A B, hoc eſt, K E
ſive K C E fore v, D K $\propto y$, atque L K $\propto y \; 8 \; \frac{ff}{d}$, atque etiam
$\frac{ff}{d} - y$: ac proinde rectangulum ſub Parametro d dictaque
D K comprehenſum $\propto dy$; at verò id quod ſub d, & L K comprehenditur $\propto dy \; 8 \; ff$, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem rectangulum cum æquale ſit aut ſupponatur quadrato applicatæ K E ſive K C E, hoc eſt, vv: erit, ut petitur, $dy \propto vv$, vel $dy . ff \propto vv$.

V. Sit deinde v aſſumpta pro $x \; 8 \; \frac{by}{a}$, ſumptoque in linea O C E
puncto M à C versùs E, ſi habeatur $- \frac{by}{a}$; at ab altera parte
lineæ A C, ſi habeatur $+ \frac{by}{a}$, ità ut A C ſit ad C M, ſicut a.
ad b: erit in recta A M diameter, ejusque vertex in
VI. puncto A, ſi terminus ff deficiat; ſin minus, in N. Et poſitâ
ratione A C ad A M, ut a ad e, ac proinde recta A M $\propto \frac{ey}{a}$,
erit Parameter $\propto \frac{ad}{e}$. Eſt enim recta C M $\propto \frac{by}{a}$, ac proinde M E $\propto y - \frac{by}{a}$, atque M C E $\propto y + \frac{by}{a}$, id eſt, M E vel M C E $\propto v$. Quoniam ergo ex natura Paraboles rectangulum ſub dicta Parametro & recta A M contentum $\propto$ quadrato ex M E vel M C E, erit, $dy \propto vv$.

Porrò cum N A ſit $\propto \frac{ffe}{da}$, erit N M $\propto \frac{ey}{a} \; 8 \; \frac{ffe}{da}$, atque

etiam

etiam $\frac{ffe}{da} - \frac{ey}{a}$: ideoque rectangulum ſub Parametro & recta N M contentum $\infty\ dy\ 8\ ff$, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem rectangulum cum ſit ∞ quadrato ex M E vel M C E, hoc eſt, vv; erit quoque $dy . ff \infty vv$.



Sit denique v aſſumpta pro $x\ 8\ \frac{by}{a}\ 8\ c$: eritque, ſup-
VII.VIII. poſitis iiſdem quæ ſupra, diameter in D O, vel in D P;
IX. &, ſi terminus ff deficiat vertex in D; ſin minus, in Q. Et poſitâ ratione D K ad D O, ut & D K ad D P, ſicut a ad e, ac proinde rectâ D O, ut & D P $\infty \frac{ey}{a}$; erit parameter $\infty \frac{ad}{e}$. Eſt enim O E $\infty\ x - \frac{by}{a} - c$, atque

O C E $\infty\, x + \frac{by}{a} + c$; itemque P E una $\infty\, x - \frac{by}{a} + c$, ac P E altera $\infty\, x + \frac{by}{a} - c$, hoc eſt, O E, O C E, & P E una vel altera erit $\infty\, v$. Eſtque Q O vel Q P (ſicut ſupra N M) $\infty\, \frac{ey}{a}\ 8\ \frac{ffe}{da}$, atque etiam $\frac{ffe}{da} - \frac{ey}{a}$: ac proinde rectangulum ſub Parametro & Q O vel Q P $\infty\, dy\ 8\ ff$, atque etiam $ff - dy$. Quare cum idem rectangulum æquale ſit quadrato ex O E vel O C E, aut ex una alteravè P E, id eſt, $v v$: erit quoque $dy . ff \infty\, v v$.

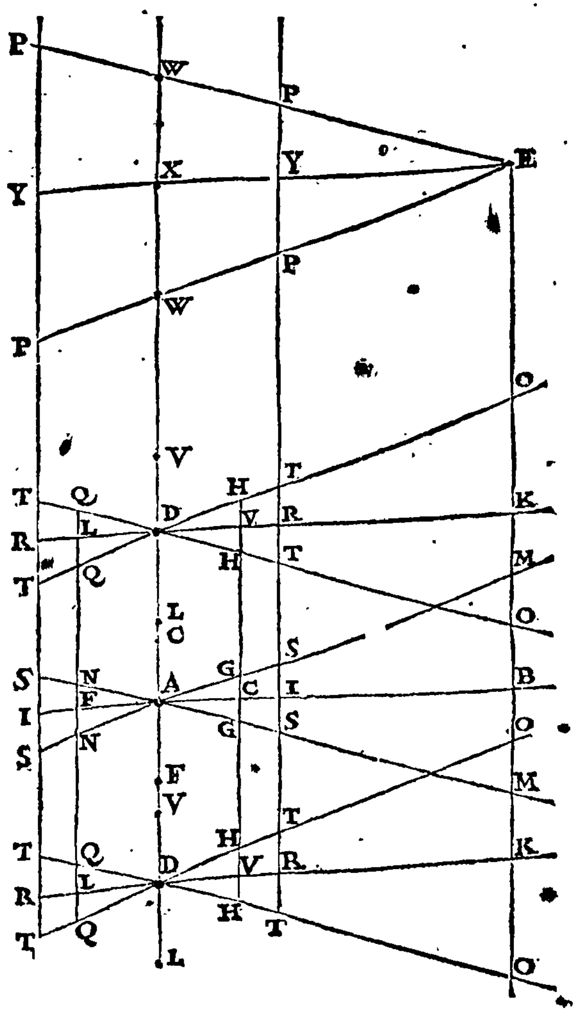
Atque ita demonſtratum eſt generaliter, quod hoc loco propoſitum fuit.

At ſi denique æquatio ſimilis ſit alicui formularum ſub N° 3 comprehenſarum, erit Locus quæſitus, ſi terminus in quo invenitur $x x$ vel $v v$ ſigno + ſit affectus, Hyperbola; ſin idem terminus ſigno — affectus ſit, Ellipſis: excepto tantùm, cùm poſteriori caſu ordinatim ad diametrum applicatæ cum ea rectos angulos faciunt, & ſimul tranſverſa diameter parametro eſt æqualis: quippe eo caſu, ut patet, quæſitus Locus Circulus exiſtit.

Et primo quidem caſu, cùm nempe terminus in quo $x x$ vel $v v$ ſigno + affectus reperitur, ac proinde Locus quæſitus eſt Hyperbola, erit quoque terminus ff cum illo ab eadem æquationis parte conſtitutus vel ſigno + affectus, vel contra; & ſi ſigno — affectus ſit, atque in æquatione habeatur fractio, ipſa majoris perſpicuitatis gratiâ in terminum yy vel zz rejiciatur. Quo facto, remanente utrâque quantitate incognitâ primùm conceptâ, ſequenti formâ ſe exhibebit æquatio: $yy \infty \frac{lxx}{g} + ff$, (id eſt, $yy - ff \infty \frac{lxx}{g}$) aut $\frac{lyy}{g} \infty\, xx - ff$: eritque, ut in ſequenti figura, caſu primo, nempe ſi terminus ff cum termino in quo $x x$ unam æquationis partem conſtituens ſigno + affectus ſit, diameter Hyperbolæ deſcribendæ in recta A X, quæ ducitur per punctum A poſitione datæ B E parallela. Sin contra, hoc eſt, ſi terminus ff ſigno — affectus ſit, uti caſu ſecundo, erit diameter in data poſitione recta A B, quæ indeterminatè pro x concipitur; ita ut ad

Caſus 1mus, cùm Locus eſt Hyperbola.

eaſdem diametros ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel aſſumpto angulo A B E æquales: eritque caſu utroque centrum Hyperboles in puncto A, & ſemi-latus tranſverſum ∞ f, quod in



dictis diametris reſpectivè per lineas A C vel A F exprimatur. Porrò ſi l ſit ∞ g, vel, quod idem eſt, ſi termino xx vel yy nulla ad-

hæreat

hæreat fractio, erunt latera tranſverſum & rectum ſibi invicem æqualia. At verò poſitis l & g inæqualibus, erit ratio lateris tranſverſi ad rectum ut l ad g.

Si enim deſcripta intelligatur prædicta Hyperbola per punctum C in utraque diametro versùs X & versùs B reſpectivè; ſupponaturque eandem ſecare rectam X E, quæ ducta ſit ipſi A B æquidiſtans, ut & ipſam B E, ad dictas diametros reſpectivè ordinatim applicatas, in puncto E: erit

$$FX \infty y+f, \qquad FB \infty x+f,$$
$$CX \infty y-f, \qquad CB \infty x-f;$$

ideoque rectangulum

$$FXC \infty yy-ff, \ \& \ FBC \infty xx-ff.$$

Cùm autem latere recto ipſi tranſverſo æquali exiſtente rectangulum F X C [1] ſit ∞ quadrato ex X E ſeu A B, hoc eſt, xx; itemque rectangulum F B C ſit ∞ quadrato ex B E, hoc eſt, yy: erit $yy-ff \infty xx$, hoc eſt, $yy \infty xx+ff$ itemque

$$xx-ff \infty yy, \text{ ſive } yy \infty xx-ff.$$

Sed cum ſecus recto latere ipſi tranſverſo inæquali exiſtente unius ad alterum ratio ſit, ut l ad g; ſimiliterque etiam ratio rectanguli F X C ad quadratum X E, aut rectanguli F B C ad quadratum B E eadem ſit [2], quæ tranſverſi lateris ad rectum, hoc eſt, eadem quæ l ad g: erit ut l ad g, ita $yy-ff$ ad xx; itemque ut l ad g, ita $xx-ff$ ad yy, hoc eſt, reductâ proportione ad æqualitatem, erit $lxx \infty gyy-gff$, ut & $lyy \infty gxx-gff$. unde diviſis omnibus per g, fit $\frac{lxx}{g} \infty yy-ff$, hoc eſt, $yy \infty \frac{lxx}{g}+ff$; & $\frac{lyy}{g} \infty xx-ff$. Quod demonſtrandum erat.

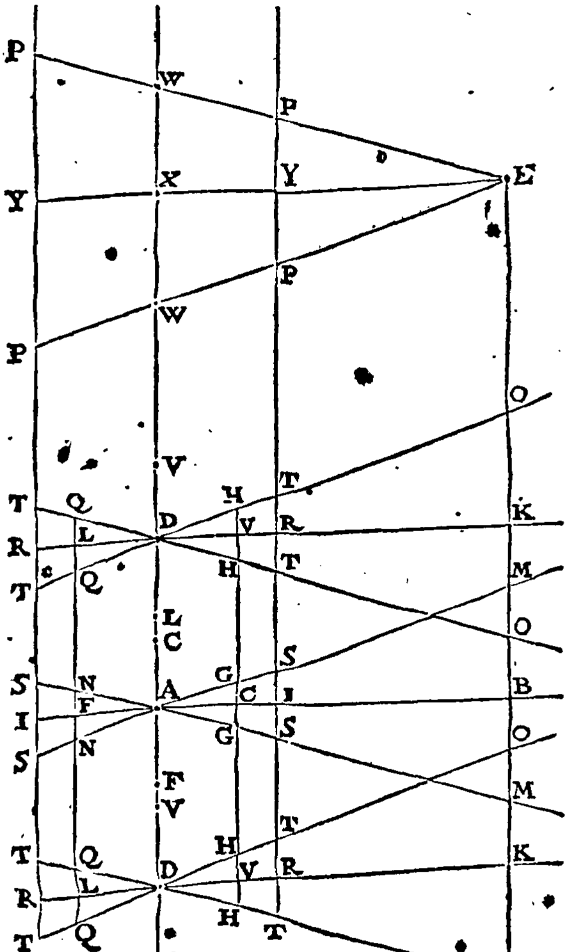
[1] per 10 primi hujus.

[2] per 10 primi hujus.

Caſus 2dus, cùm Locus eſt Hyperbola. At ſi quantitatum incognitarum primò conceptarum unâ ex æquatione ſublatâ, aliâque in ejuſdem locum juxta Regulam aſſumptâ, æquatio ſit $zz \infty \frac{lxx}{g}+ff$ (id eſt, $zz-ff \infty \frac{lxx}{g}$), vel $\frac{lxx}{g} \infty xx-ff$: aut z aſſumpta erit pro $y \pm c$, vel pro $y \pm \frac{bx}{a}$, aut

§. 1. pro $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$. Et quidem primò ſi z aſſumpta ſit pro $y \pm c$, ducenda eſt per punctum A recta A D ipſi B E parallela & ∞c; ita ut, ſi z fuerit aſſumpta pro $y-c$, prædictum punctum D cadat ab eadem parte lineæ A B, quâ datus vel conceptus eſt angulus A B E. Sin contra z fuerit aſſumpta pro $y+c$, idem illud punctum

ctum D reperiatur ab altera parte lineæ A B. Deinde per punctum D ductâ rectâ D K ipſi A B parallelâ, quæ ſecet rectam B E productam, ſi opùs fuerit, in puncto K: erit deſcribendæ Hyperbolæ



diameter, ſi terminus ff ſigno + affectus ſit, in recta D X. ſin contra, hoc eſt, ſi terminus ff ſigno — affectus ſit, in prædicta

recta D K; ita ut ad eaſdem diametros ordinatim applicatæ angulos faciant, dato vel aſſumpto angulo A B E vel D K E ſive D X E æquales. Eritque caſu utroque D centrum, & ſemilatus tranſverſum $\infty\, f$, quod in dictis diametris reſpectivè per lineas D V vel D L exprimatur; eritque porrò tranſverſi lateris ad rectum ratio, ut l ad g. Si enim deſcripta intelligatur prædicta Hyperbola per punctum V in utraque diametro, versùs X & K reſpectivè, eademque ſecare ſupponatur rectam X E, ut & ipſam K E, ad dictas diametros ordinatim applicatas, in puncto E: erit D A X ſive K B E $\infty\, y + c$, & D X ſeu K E $\infty\, y - c$; ideoque eadem D A X & K B E vel D X & K E ea ipſa, quæ pro z eſt aſſumpta: ac propterea L X $\infty\, z + f$, & L K $\infty\, x + f$

atque V X $\infty\, z - f$, & V K $\infty\, x - f$:

ideoque rectangula

L X V $\infty\, zz - ff$, & L K V $\infty\, xx - ff$.

Cumque eadem ſit ratio tam unius quàm alterius rectanguli L X V ad quadratum X E, ut & utriuſque rectanguli L K V ad quadratum ex K E vel K B E reſpectivè, quæ eſt lateris tranſverſi ad rectum, hoc eſt, ut l ad g: erit quoque ut

l ad g, ita $zz - ff$ ad xx,

itemque ut l ad g, ita $xx - ff$ ad zz:

hoc eſt, revocatâ proportione ad æqualitatem,

erit $\frac{lxx}{g} \infty\, zz - ff$, ſive $zz \infty \frac{lxx}{g} + ff$,

& $\frac{lzz}{g} \infty\, xx - ff$: aut, ſi l ſit $\infty\, g$,

erit $zz \infty\, xx + ff$,

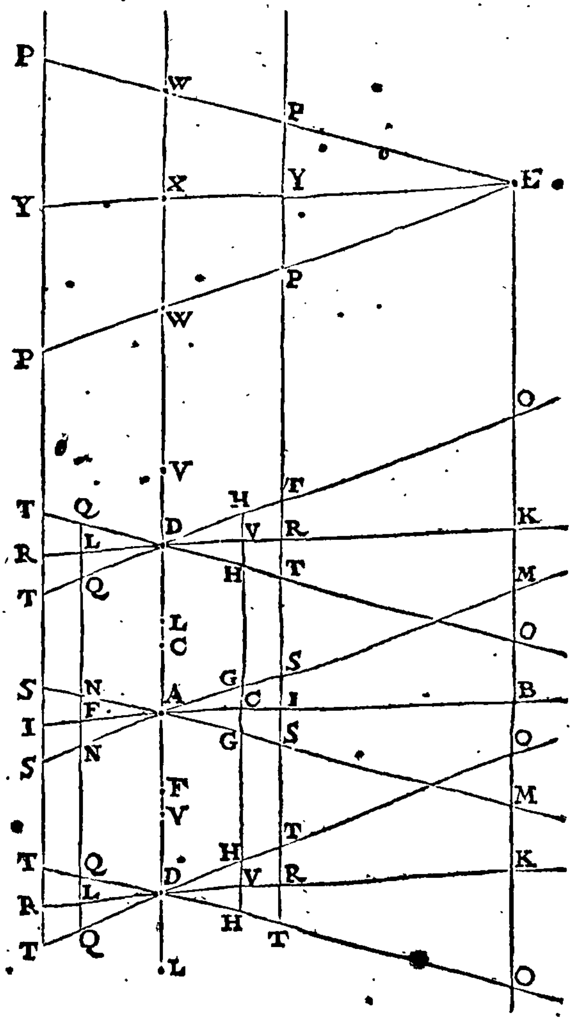
& $zz \infty\, xx - ff$.

Quod quidem hîc demonſtrandum erat.

§. 2. At verò ſecundò, ſi z aſſumpta ſit pro $y - \frac{bx}{a}$, ſumpto in linea B E puncto M, ita ut A B ad B M ſit, ſicut a ad b; hoc eſt, ut B M ſit $\infty \frac{bx}{a}$, (quod quidem punctum M, ſi z aſſumpta fuerit pro $y - \frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ A B quâ datus vel conceptus angulus A B E ſumendum eſt; ſed contra, ſi habeatur $z \infty\, y + \frac{bx}{a}$, ab altera parte ejuſdem lineæ A B ſumi debet,) oportet per puncta A & M rectam lineam ducere A M, ſecantem H C H & Q F Q per prædicta puncta C & F ductas ipſi B E parallelas in punctis G & N.

Quo

Quo facto, ſi terminus *ff* ſigno + affectus ſit, erit quæſitæ Hyperbolæ diameter in recta A W ipſi B E parallela, ad quam ordinatim applicatæ, ut E W, ſunt ipſi A M æquidiſtantes. Sin con-



tra, hoc eſt, ſi terminus *ff* ſigno — ſit affectus, erit diameter in prædicta recta A M, ita ut ordinatim ad eam applicatæ cum ipſa

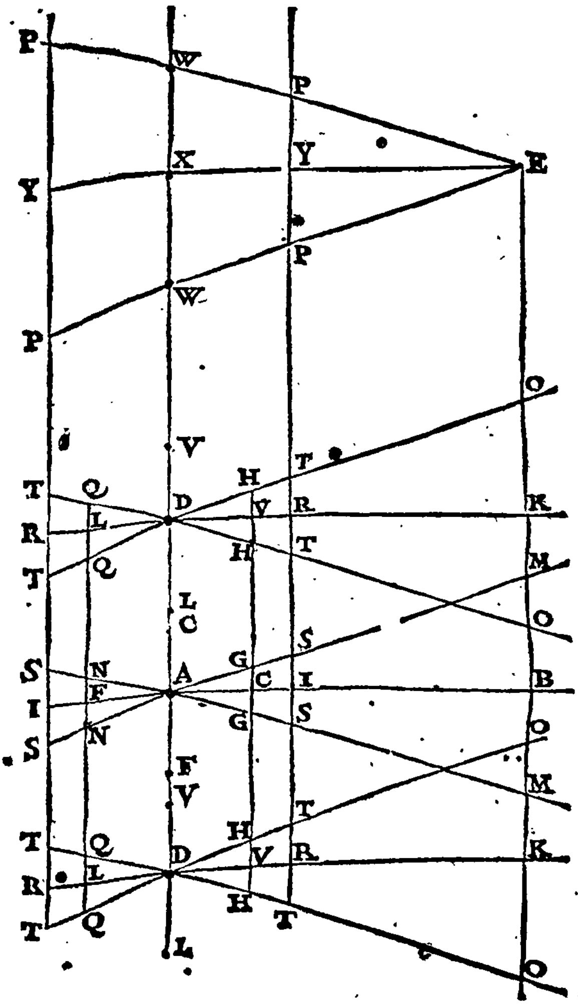
faciant angulos angulo AME vel AMBE æquales: eritque tam unius quàm alterius Hyperbolæ centrum in puncto A. Et quantùm ad earundem latera tam tranſverſa quàm recta, erit ejus Hyperboles, quæ ad diametrum AW deſcribitur, ſemi-latus tranſverſum ∞f (idque iterum exprimatur per AC vel AF), & ratio ejuſdem tranſverſi lateris ad rectum, ut aal ad eeg; poſito nimirum quòd ratio ipſius AB ad ductam AM ſit ut a ad e; at verò Hyperboles, quæ ad diametrum AM deſcribitur, ſemi-latus tranſverſum erit AG vel AN. Quæ quidem AG vel AN erit $\infty \frac{ef}{a}$; cum ſit ut AB ad AM, ſive ut a ad e; ita AC vel AF, hoc eſt, f, ad AG vel AN; & ratio ejuſdem tranſverſi lateris ad rectum, ut eel ad aag. Si enim prædicta Hyperbola deſcripta intelligatur, tranſiens per prædictum punctum C in diametro AW & per punctum G in diametro AM, præſupponaturque rectam ME vel WE ordinatim ad eaſdem diametros applicatas à prædicta Hyperbola ſecari in puncto E: erit MBE vel AXW $\infty y + \frac{bx}{a}$, & ME vel AW $\infty y - \frac{bx}{a}$, hoc eſt, AXW ſeu MBE, uti & AW ſeu ME ea ipſa erit, quæ pro z aſſumpta eſt. Eſt autem AM ſeu WE $\infty \frac{ex}{a}$, ac porrò caſu priori, ubi deſcripta eſt Hyperbola ad diametrum AW, (cùm nempe terminus ff ſigno + eſt affectus) FW ſive FXW $\infty z + f$,
& CW ſive CXW $\infty z - f$:
ideoque rectangulum

$$FWC \text{ vel } FXWC \infty zz - ff, \text{ \& quadratum } WE \infty \frac{eexx}{aa}.$$

Cumque ſit ut latus tranſverſum ad rectum, ita prædictum rectangulum ad prædictum quadratum, hoc eſt, eo caſu ut aal ad eeg, ita $zz - ff$ ad $\frac{eexx}{aa}$: erit $eelxx \infty eegzz - eegff$, &, omnibus per eeg diviſis, $\frac{lxx}{g} \infty zz - ff$, id eſt, $zz \infty \frac{lxx}{g} + ff$.

At verò caſu poſteriori, ubi deſcripta eſt Hyperbola ad diametrum AM, cùm nempe terminus ff ſigno − eſt affectus, erit NM $\infty \frac{ex}{a} + \frac{ef}{a}$, & GM $\infty \frac{ex}{a} - \frac{ef}{a}$: ideoque rectangulum NMG $\infty \frac{eexx}{aa} - \frac{eeff}{aa}$. Cumque ſit ut latus tranſverſum ad rectum, id eſt, hoc caſu, ut eel ad aag, ita prædictum rectangulum NMG

ad ME vel MBE quadratum, hoc eſt, ad zz: erit ut eel ad aag, ita $\frac{eexx - eeff}{aa}$ ad zz: ac proinde $eelzz \infty eegxx - eegff$.

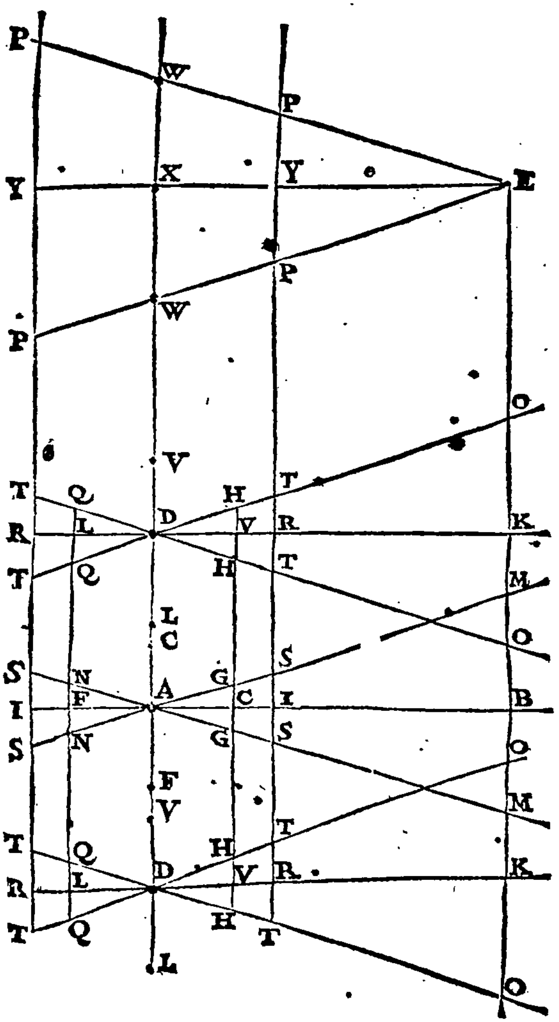


Hoc eſt, factâ diviſione per eeg, erit $\frac{lzz}{g} \infty xx - ff$. Quod hîc demonſtrandum erat.

§. 3. Si deniquc tertiò z aſſumpta ſit pro y 8 $\frac{bx}{a}$ 8 c, ductâ, ut ſupra, A D ∞ f, & D K ipſi A B parallelâ, ſumptoque in linea K E puncto O; ita ut D K ad K O ſit, ſicut a ad b, hoc eſt, ut K O ſit ∞ $\frac{bx}{a}$, ducenda eſt per puncta D & O recta D O, ſecans prædictam H C H in H, atque occurrens præfatæ Q F Q in Q. (Conſtat autem ex ſuperiùs explicatis prædictum punctum O, ſi in æquatione habeatur — $\frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ A B ſumendum eſſe, quâ datus aut aſſumptus eſt angulus A B E; at ſi habeatur + $\frac{bx}{a}$, illud ipſum punctum ex altera ejuſdem lineæ parte ſumi debere.) Quo facto, ſi terminus ff ſigno + affectus ſit, erit diameter quæſitæ Hyperbolæ in recta D W. Sin contra, hoc eſt, ſi terminus ff ſigno — ſit affectus, erit ipſa in prædicta recta D O; ita ut ad eaſdem diametros ordinatim applicatæ angulos faciant angulo D W E ſive D X W E, aut D O E ſive D O K E æquales: eritque tam unius quàm alterius Hyperbolæ centrum in puncto D. Et quantùm ad earundem latera tam tranſverſa quàm recta, erit ejus Hyperbolæ, quæ ad diametrum D W deſcribitur, hoc eſt, cùm terminus ff ſigno + afficitur, latus tranſverſum ∞ f. idque hîc iterum exprimatur per D V vel D L, ac ratio ejuſdem lateris tranſverſi ad rectum, ut aal ad eeg; at verò Hyperboles, quæ ad diametrum D O deſcribitur, nimirum, quando terminus ff ſigno — affectus eſt, erit ſemi-latus tranſverſum recta D Q vel D H, id eſt, $\frac{ef}{a}$; atque ratio ejuſdem lateris tranſverſi ad rectum, ut eel ad aag. Si enim deſcripta intelligatur Hyperbola, tranſiens per punctum V in diametro D W & per punctum H in diametro D O, ſupponaturque eandem Hyperbolam ſecare rectam W E vel O E in puncto E, erit O K B E ſive D A X W ∞ $y+c+\frac{bx}{a}$, & O E ſive D W ∞ $y-c-\frac{bx}{a}$, ac O B E ſive D A W ∞ $y+c-\frac{bx}{a}$, atque O K E vel D X W ∞ $y-d+\frac{bx}{a}$. Hoc eſt, erunt omnes illæ prænominatæ lineæ eædem, quæ pro z aſſumptæ ſunt. Eſt autem D O ſeu W E ∞ $\frac{ex}{a}$, ideoque quadratum W E ∞ $\frac{eexx}{aa}$: ac porrò caſu priori, ubi deſcripta eſt Hyperbola ad diametrum

D W,

DW, cùm nempe terminus ff ſigno $+$ afficitur, LW ſive LXW ∞ $z+f$, & VW ſive VXW ∞ $z-f$: ideoque rectangulum LWV ſive LXWV ∞ $zz-ff$. Cumque ſit ut latus



tranſverſum ad rectum; ita prædictum rectangulum ad W E quadratum, hoc eſt, eo caſu, ut aal ad eeg, ita $zz-ff$ ad

$eexx$

$\frac{eexx}{aa}$: erit $eelxx \propto eegzz - eegff$, ac, diviſis omnibus per eeg, $\frac{lxx}{g} \propto zz - ff$, ſive $zz \propto \frac{lxx}{g} + ff$.

At verò caſu poſteriori, ubi deſcripta eſt Hyperbola ad diametrum D O, erit Q O $\propto \frac{ex}{a} + \frac{ef}{a}$, & H O $\propto \frac{ex}{a} - \frac{ef}{a}$; ideoque rectangulum Q O H $\propto \frac{eexx - eeff}{aa}$. Cumque iterum ſit, ut latus tranſverſum ad rectum, ita prædictum rectangulum Q O H ad quadratum ex O K B E vel O E, ſive O B E aut O K E: id eſt, eo caſu, ut eel ad aag, ita $\frac{eexx - eeff}{aa}$ ad zz: erit quoque proinde $eelzz \propto eegxx - eegff$. Hoc eſt, diviſis omnibus per eeg, erit $\frac{lzz}{g} \propto xx - ff$. Quæ quidem omnia ſunt, quæ caſu ſuperiori in triplici ſua diſtinctione determinanda ac demonſtranda erant.

Caſus 3

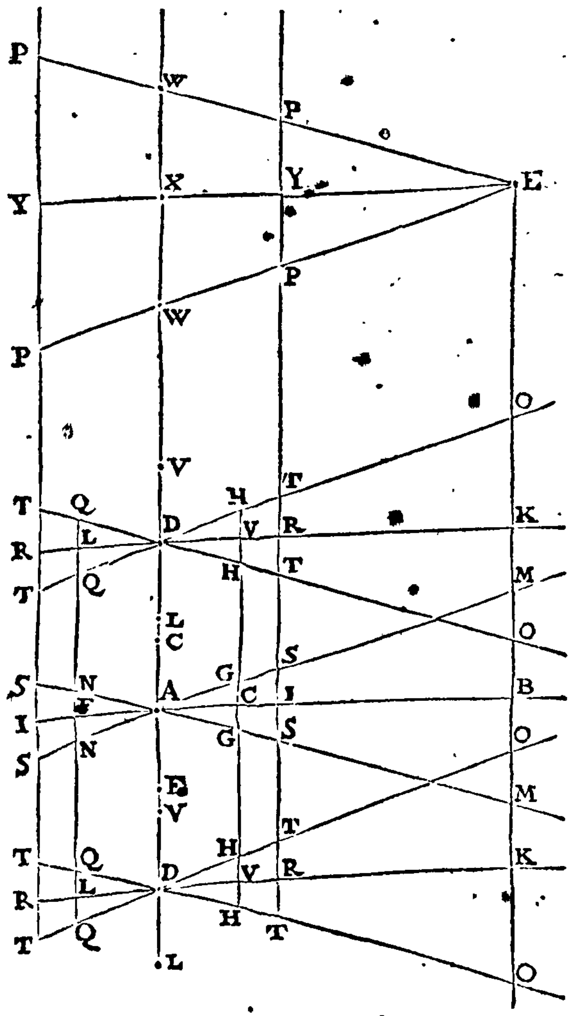
Si verò quantitatum incognitarum ab initio conceptarum, alterâ ex æquatione ſublatâ, aliâque ejuſdem loco ſecundùm Regulam aſſumptâ, æquatio ſit $yy \propto \frac{lvv}{g} + ff$, (id eſt, $yy - ff \propto \frac{lvv}{g}$) aut $\frac{lyy}{g} \propto vv - ff$; atque ipſa v tantùm aſſumpta ſit pro x 8 notâ aliquâ quantitate, Sit v aſſumpta pro x 8 h; Hoc caſu in linea A B vel eadem productâ ſumendum eſt punctum I, ita ut A I ſit $\propto h$ (qùod quidem punctum I, ſi v aſſumpta fuerit pro $x - h$, ab A versùs B; Sin contra, ab altera parte puncti A in producta B A ſumi debet.) Quo facto, erit idem illud punctum I centrum deſcribendæ Hyperboles, &, mutatis mutandis, cætera omnia, ut ſupra caſu 1.mo memoratum eſt, nempe, diameter in recta I Y vel in recta I B, ſemi-latus tranſverſum $\propto f$, atque proportio lateris tranſverſi ad rectum, ut l ad g.

Caſus 4.ᵗᵘˢ, cùm Locus eſt Hyperbola.

Si denique quantitatum incognitarum, primò conceptarum, utrâque ex æquatione ſublatâ, aliiſque earundem loco juxta Regulam aſſumptis, æquatio ſit $zz \propto \frac{lvv}{g} + ff$, (id eſt, $zz - ff \propto \frac{lvv}{g}$), aut $\frac{lzz}{g} \propto vv - ff$; atque z primùm aſſumpta ſit pro y 8 c, ducenda eſt utrinque I R parallela B E, & $\propto c$: quo facto, erit idem illud punctum R centrum, & diameter in recta R Y

vel

vel R K, ejuſque ſemi-latus tranſverſum $\propto f$, ac ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut l ad g. quemadmodum ea omnia, mutatis mutandis, caſu ſecundo §. 1. fuſiùs explicata ſunt.



§. 2. At ſi z aſſumpta fuerit pro $y \propto \frac{bx}{z}$, erit punctum S, in

quo MA, vel quæ ipſi in directum adjungitur, per prædictam IR, vel eandem productam, ſi opùs ſit, interſecatur, centrum ſectionis; & cætera omnia, mutatis mutandis, ut ſupra caſu ſecundo §. 2. memoratum eſt. Nempe erit ſectionis diameter in recta SP vel SM (atque ut ibidem AM ſeu EW erat ∞ $\frac{ex}{a}$, ita hîc SM ſeu EP erit ∞ $\frac{ev}{a}$: cum ſit ut AB ad AM, hoc eſt, ut *a* ad *e*, ita BI, hoc eſt, *v*, ad SM); eritque porrò ſemi-latus tranſverſum ∞ *f* & $\frac{ef}{a}$ reſpectivè, ac ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut *aal* ad *eeg*, vel ut *eel* ad *aag*.

3. Si denique z aſſumpta fuerit pro $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$, erit punctum T, in quo DO, vel quæ ipſi in directum adjungitur, per prædictam IR, vel productam, ſi opùs ſit, interſecatur, centrum; & reliqua omnia, mutatis mutandis, ut paragrapho præcedenti, & ſupra caſu ſecundo §. 3. fuſiùs expoſitum eſt. Atque eorum omnium demonſtratio in præcedentibus explicitè eſt compreheſa, cum termini & quantitates omnes hîc cum prioribus conveniant, excepto tantùm, quòd, quæ ibidem deſignabantur per *x*, hîc ſint $x \pm h$, hoc eſt, *v*. Ita enim quod ibi erat AB & EX ∞ *x*, hîc eſt IB & EY ∞ *v*; quod ibi erat DK & EX ∞ *x*, hîc eſt RK & EY ∞ *v*; quod ibi erat AM & EW ∞ $\frac{ex}{a}$, hîc eſt SM & EP ∞ $\frac{ev}{a}$; quod ibi erat DO & EW ∞ $\frac{ex}{a}$, hîc eſt TO & EP ∞ $\frac{ev}{a}$.

Quamvis autem ſecundùm Regulam accidere etiam poſſit, ut *v* compoſita ſit ex $x \pm$ aliâ quâdam quantitate, cui & incognita *y* permixta ſit; ita tamen, ut eo caſu z ſolummodo ex $y \pm$ aliâ quantitate in totum cognitâ conſtare queat, haudquaquam tamen operæ pretium exiſtimamus, caſus omnes eò ſpectantes ſpeciatim perſequi: cum ex iis, quæ tam in Locis Parabolicis quàm in poſteriori exemplo reductionis æquationum ad formulas Theorematum 12[mi] & 13[tii] ſuperiùs explicata ſunt, iidem illi caſus per ſe manifeſti ſint atque in præcedentibus etiam omnino plenèque comprehendantur, ſi nimirum, ſubſtituto per omnia *x* loco *y* & vice verſâ, eadem *x* non per rectam AB ſed per eam, quæ ex A ipſi BE parallela ducta ſit, atque *y* non per BE ſed per rectam ipſi AB æquidiſtantem, deſignetur. Quòd hîc generaliter monuiſſe ſuffecerit.

Alii

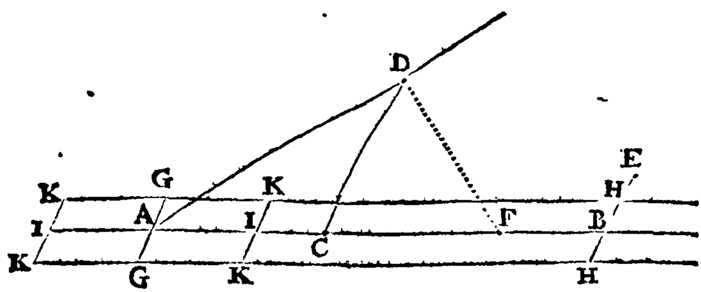
Alii quatuor caſus, cùm Locus eſt Hyperbola.

Iam verò quod ſupra annotavimus accidere quoque poſſe, ut æquatio ſit

$$1.\ yx \infty ff,$$
$$2.\ zx \infty ff,$$
$$3.\ yv \infty ff,$$
$$4.\ zv \infty ff,$$

omnibusque iſtis caſibus Locum quæſitum eſſe Hyperbolam, ejus determinatio ſive deſcriptio atque demonſtratio ex iis, quæ jam ante explicata ſunt, ſponte quoque profluunt.

Primo enim caſu, ſi in recta A B ſumatur A C ∞f, atque ex puncto C eductâ rectâ C D, quæ ipſi B E ſit æquidiſtans & æqualis priori A C, hoc eſt ∞f, per A & D recta linea ducatur: erit A centrum Hyperbolæ, cujus axis eſt in recta A D, & punctum D vertex, atque A B aſymptotos. ſive (ductâ rectâ D F ad A D perpendiculari ac in A B terminata) erit A D ſemi-latus tranſverſum, & ratio tranſverſi ad rectum, ut A D quadratum ad D F



quadratum. Si namque prædicta Hyperbole ſecare ſupponatur rectam B E in puncto E, erit [1] rectangulum A B E ∞ quadrato ex A C vel C D. Quare cum A B ſit ∞x, B E ∞y, & A C ∞f: erit $xy \infty ff$. Quod primo caſu erat demonſtrandum.

[1] per 3 primi hujus.

Secundo caſu, cùm nempe æquatio eſt $zx \infty ff$, oportet ut z juxta Regulam ſit aſſumpta pro y 8 notâ quâdam quantitate. Eſto

itaque aſſumpta pro *y* 8 *c*, atque idcirco ad deſcribendam Hyperbolam ducatur per punctum A recta A G ipſi B E parallela, ac ∞ *c*: ſumpto nimirum puncto G vel ab hac vel ab illa parte lineæ A B, prout *c* quantitas ſigno + vel — fuerit affecta; ductâque porrò G H ipſi A B parallelâ, centro G, Aſymptoto G H, cæteriſque, ut ſupra, mutatis mutandis, Hyperbole deſcribatur. Hæc igitur ſi ſecare ſupponatur rectam B E in puncto E, erit rectangulum G H B E vel G H E ∞ *ff*. Vnde cum ſit G H ∞ *x*, & H E vel H B E ∞ *y* 8 *c*, id eſt, *z*: erit G H E vel G H B E rectangulum ∞ *zx*, ac propterea *zx* ∞ *ff*. Quod 2do caſu demonſtrandum erat.

Tertio caſu, nempe ſi æquatio ſit *yv* ∞ *ff*: *v* quoque tantùm pro *x* 8 notâ quâdam quantitate ſumpta ſit oportet, veluti pro *x* 8 *h*. Ideoque ad inventionem Loci quæſiti, in recta A B vel in ipſâ productâ ſumenda eſt A I ∞ *h*, ac porrò centro I, atque Aſymptoto I A B vel I B, cæteriſque, ut ſupra, mutatis mutandis, deſcribenda eſt Hyperbola, quæ ſi rectam B E ſecare ſupponatur in E: erit rectangulum I A B E vel I B E ∞ *ff*. Quare cum I A B vel I B ſit ∞ *x* 8 *h*, hoc eſt, *v*, & B E ∞ *y*: erit *yv* ∞ *ff*. Quod 3^tio^ caſu demonſtrandum erat.

Denique quarto caſu, ſi nempe æquatio ſit *zv* ∞ *ff*: erit *z* aſſumpta pro *y* 8 *c*, & *v* pro *x* 8 *h*. Ideoque per prædictum punctum I ducenda eſt I K ipſi BE æquidiſtans & ∞ *c*; ductâque KH ipſi AB parallelâ, centro K, atque Aſymptoto K G H vel K H, cæteriſque, ut caſu 1mo, mutatis mutandis Hyperbole deſcribenda eſt, quæ ſi ſecare ſupponatur rectam B E in E: erit rectangulum K G H E vel K H E, ut & K G H B E vel K H B E ∞ *ff*. Hinc cum H B E vel H E ſit ∞ *y* 8 *c*, id eſt, *z*, & K G H vel K H ∞ *x* 8 *h*, hoc eſt, *v*: erit *zv* ∞ *ff*. Quod 4to caſu demonſtrandum erat.

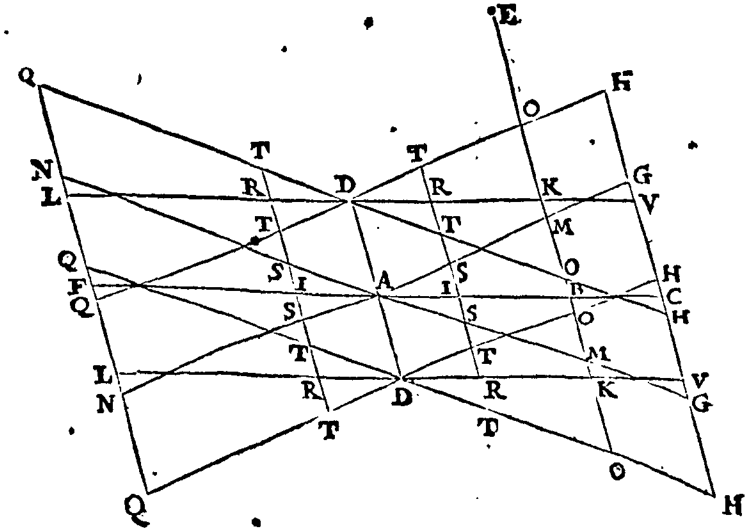
Atque hæc quidem omnia ſunt, quæ circa inventionem Locorum eo caſu, quo iidem ſunt in linea Hyperbolica, conſideranda veniunt.

Altero autem caſu generali formularum ſub N^ro^ 3. comprehenſarum, cùm nempe terminus, in quo invenitur *xx* vel *vv* ſigno — ſit affectus, ac proinde Locus quæſitus vel Ellipſis vel Circuli circumferentia exiſtit, ſi in æquatione fractio reperiatur, rejici quoque illa poterit majoris perſpicuitatis gratiâ in terminum *yy* vel *zz*. Quo facto primò, remanente utrâque quantitate

inco-

incognitâ ab initio conceptâ, ſequenti formulâ ſe exhibebit æquatio $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$: eritque, ut in ſequenti figura, deſcribendæ Ellipſeos diameter in recta A B, quæ pro x indeterminatè eſt concepta, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, dato vel aſſumpto angulo A B E æquales; ac centrum in puncto A, & ſemi-latus tranſverſum ∞f. id quod in dicta diametro per lineam A C vel A F exprimatur, eritque ratio ejuſdem tranſverſi lateris ad rectum, ut h ad g. *Caſus 1mus, cùm Locus vel Ellipſis vel Circuli circumferentia exiſtit.*

Si enim deſcripta intelligatur prædicta Ellipſis, tranſiens per puncta C & F, ſecanſque applicatam B E in puncto E: erit F B $\infty f + x$, & B C $\infty f - x$: ideoque rectangulum F B C $\infty ff - xx$. At cum ex natura Ellipſeos, lateribus recto tranſverſoque æqualibus, prædictum rectangulum F B C [1] ſit ∞ quadrato ex B E, hoc eſt, yy: erit quoque proinde eo caſu $yy \infty ff - xx$. Et facilè [1] *per 13 præcedentis hujus.*



apparet, ſi, iiſdem poſitis, B E ſuper rectam F C foret quoque perpendicularis, hoc eſt, ut angulus quem ordinatim applicatæ faciunt ad diametrum ſit rectus, prædictam curvam fore Circuli circumferentiam.

Cum autem porrò, lateribus tranſverſo rectoque inæqualibus

[1] per 13 primi hujus.

atque in ratione ut l ad g, eadem ſit ratio [1] rectanguli F B C ad B E quadratum, quæ eſt lateris tranſverſi ad rectum, hoc eſt, ut l ad g: ex prædictis palàm eſt fore ut l ad g, ita $ff - xx$ ad yy, hoc eſt, eſſe $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$. Quòd eo caſu demonſtrandum erat.

Caſus 2dus, cùm Locus eſt vel Ellipſis vel Circuli circumferentia.

At ſi, quantitatum incognitarum primò conceptarum unâ ex æquatione ſublatâ aliâque in ejuſdem locum juxta Regulam aſſumptâ, æquatio ſit $\frac{lzz}{g} \infty ff - xx$: aut z aſſumpta erit pro y 8 c, aut pro y 8 $\frac{bx}{a}$, aut pro y 8 c 8 $\frac{bx}{a}$.

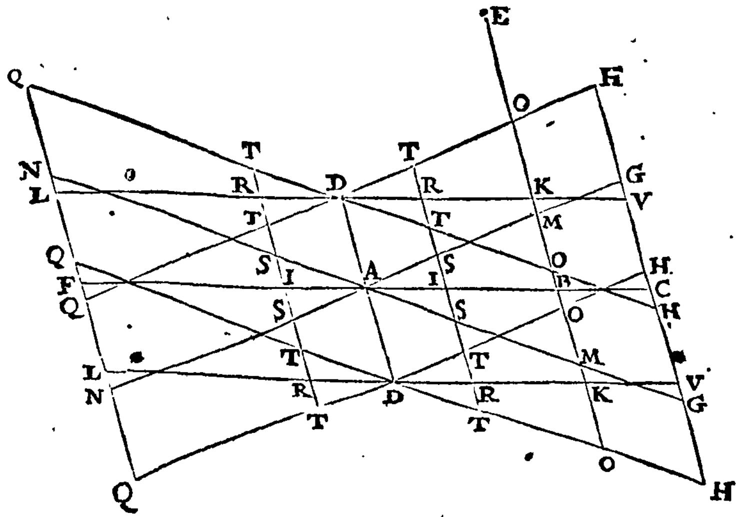
§. 1. Et primùm quidem, ſi z aſſumpta fuerit pro y 8 c, ducenda eſt per punctum A recta A D ipſi B E parallela ac ∞c, ita ut, ſi z fuerit aſſumpta pro $y - c$, prædictum punctum D cadat ab eadem parte lineæ A B, quâ datus vel conceptus eſt angulus A B E; ſin contra z fuerit aſſumpta pro $y + c$, idem illud punctum D ab altera parte lineæ A B reperiatur. Deinde ductâ per D rectâ D K ipſi A B parallelâ, quæ ſecet rectam B E, productam versùs B, ſi opus fuerit, in puncto K, erit quæſitæ Ellipſeos diameter in recta D K, ad quam ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, dato vel aſſumpto angulo A B E ſeu D K E æquales. Punctum autem D centrum erit, & ſemi-latus tranſverſum ∞f. quod in dictis diametris per lineas D V & D L exprimatur, eritque ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut l ad g.

Si enim prædicta Ellipſis deſcripta intelligatur tranſiens per puncta L & V, quæ ſupponatur ſecare rectam B E, ad prædictam diametrum ordinatim applicatam, in puncto E: erit K B E $\infty y + c$, & K E $\infty y - c$, ideoque eadem K B E vel K E ea ipſa, quæ pro z aſſumpta eſt. Cumque L K ſit $\infty f + x$, & K V $\infty f - x$: erit rectangulum L K V $\infty ff - xx$. At cum eadem ſit ratio dicti rectanguli L K V ad quadratum ex K B E vel K E, hoc eſt, ad zz, quæ eſt lateris tranſverſi ad rectum, hoc eſt, ut l ad g: erit ut l ad g, ita $ff - xx$ ad zz, hoc eſt, erit $\frac{lzz}{g} \infty ff - xx$. Quod quidem, ſi l ſit ∞g, idem eſt ac $zz \infty ff - xx$. Atque hîc iterum facilè apparet, quòd, exiſtente angulo D K B E vel D K E recto, & $l \infty g$, hoc eſt, rectangulo L K V ∞ K E quadrato, prædicta curva Circulus ſit futura.

§. 2. At verò, ſi z aſſumpta fuerit pro y 8 $\frac{bx}{a}$, ſumpto in linea B E,

pro-

productâ versùs B, ſi opùs fuerit, puncto M; ita ut A B ad B M ſit, ſicut a ad b, hoc eſt, ut B M ſit $\infty \frac{bx}{a}$, (quod quidem punctum M, ſi z aſſumpta fuerit pro $y - \frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ A B, quâ datus vel conceptus eſt angulus A B E, ſumi debet; ſin contra, z pro $y + \frac{bx}{a}$ aſſumpta fuerit, ab altera ejuſdem lineæ A B parte ſumendum eſt) oportet per puncta A & M rectam lineam ducere N A M G, ſecantem rectam H C H, atque occurrentem ipſi Q F Q, quæ per prædicta puncta C & F ipſi B E ductæ ſunt æquidiſtantes, in G & N. Quô facto, erit quæſitæ Ellipſeos diameter



in recta N G, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, angulo A M E vel A M B E æquales. Porrò centrum ejuſdem erit in puncto A, & ſemi-latus tranſverſum erit recta A N vel A G. (quæ quidem A N vel A G, ſi ratio A B ad A M ſupponatur ut a ad e, æquabitur $\frac{ef}{a}$: çum ſit ut A B ad A M, ſive ut a ad e, ita A C, hoc eſt, f, ad A G.) Denique ratio tranſverſi lateris ad rectum erit ut eel ad aag, id eſt, ſi l ſit ∞g,

∞g, ſive, quod idem eſt, ſi termino zz nulla adhæreat fractio, ut ee ad aa, hoc eſt, ut A M quadratum ad quadratum A B.

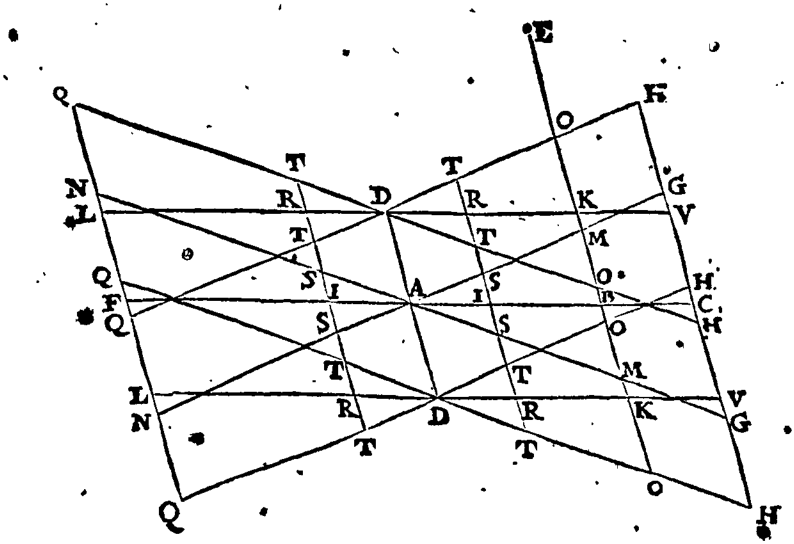
Etenim ſi prædicta Ellipſis deſcripta intelligatur, tranſiens per N & G, ſupponaturque eandem ſecare rectam M E vel M B E, ad prædictam diametrum ordinatim applicatam in puncto E: erit eadem M E $\infty\ y - \frac{bx}{a}$, & M B E $\infty\ y + \frac{bx}{a}$, ac proinde ea ipſa, quæ pro z aſſumpta eſt. Cumque A M ſit $\infty\ \frac{ex}{a}$, erit N M $\infty\ \frac{ef}{a} + \frac{ex}{a}$, & M G $\infty\ \frac{ef}{a} - \frac{ex}{a}$: ideoque rectangulum N M G $\infty\ \frac{eeff}{aa} - \frac{eexx}{aa}$. At cum eadem ſit ratio dicti rectanguli N M G ad quadratum ex M B E vel M E, quæ eſt lateris tranſverſi ad rectum, hoc eſt, eadem quæ eel ad aag: erit quoque ut eel ad aag, ita $\frac{eeff - eexx}{aa}$ ad zz, ac proinde $eelzz$ $\infty\ eegff - eegxx$. id eſt, factâ diviſione per eeg, erit $\frac{lzz}{g}$ $\infty\ ff - xx$. ſive, poſitâ $l \infty g$, $zz \infty ff - xx$. Vnde ex ante dictis iterum apparet, quòd ſi angulus A M B E vel A M E rectus ſit, ac ſimul $eel \infty aag$, hoc eſt, rectangulum N M G ∞ quadrato ex M E vel M B E, prædictam curvam fore Circulum, cujus centrum ſit A, & ſemi-diameter A N vel A G.

§. 3. Denique ſi tertiò z aſſumpta ſit pro y 8 c 8 $\frac{bx}{a}$, ductâ, ut ſupra, A D ∞f, & D K ipſi A B parallelâ, ſumptoque in linea K E puncto O, ita ut D K ad K O ſit, ſicut a ad b, hoc eſt, ut K O ſit $\infty\ \frac{bx}{a}$: ducenda eſt per puncta D & O recta Q D O H, ſecans prædictam H C H in H, atque occurrens præfatæ Q F Q in Q. (conſtat autem ex iis, quæ jam ſæpiùs monita ſunt, ſi habeatur $-\frac{bx}{a}$, prædictum punctum O ab eadem parte lineæ D K, quâ datus vel aſſumptus eſt angulus D K E, ſumendum eſſe; at ſi habeatur $+\frac{bx}{a}$, illud ipſum ab altera ejuſdem lineæ parte ſumi debere.) Quo facto, erit deſcribendæ Ellipſeos diameter in prædicta recta Q D H, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ

plicatæ

pſicatæ cum ea angulos faciant ſ angulo D O K E vel D O E æquales. Porrò centrum erit in D, & ſemi-latus tranſverſum D Q vel D H ∞ A N ſeu $\frac{ef}{a}$, ac ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut eel ad aag.

Si enim quæſita Ellipſis deſcripta intelligatur, tranſiens per puncta Q & H, eademque ſecare ſupponatur rectam O E vel O K E in puncto E: erit O K B E ∞ $y+c+\frac{bx}{a}$, O E ∞



$y-c-\frac{bx}{a}$, O B E ∞ $y+c-\frac{bx}{a}$, & O K E ∞ $y-c+\frac{bx}{a}$: ac proinde prænominatæ illæ lineæ eædem erunt, quæ pro z, aſſumptæ ſunt. Cumque porrò ſit D O ſeu A M ∞ $\frac{ex}{a}$, ideoque Q O ∞ $\frac{ef}{a}+\frac{ex}{a}$, & O H ∞ $\frac{ef}{a}-\frac{ex}{a}$: erit rectangulum Q O H ∞ $\frac{eeff-eexx}{aa}$. At cum eadem ſit ratio dicti rectanguli Q O H

ad quadratum ex O K B E vel O E, aut ad quadratum ex O B E vel O K E, quæ eſt tranſverſi lateris ad rectum, hoc eſt, ut eel ad aag: erit quoque ut eel ad aag, ita $\frac{eeff - eexx}{aa}$ ad zz; ac propterea $eelzz \infty eegff - eegxx$, &, diviſis omnibus per eeg, $\frac{lzz}{g} \infty ff - xx$. id eſt, ſi l ſit ∞g, erit $zz \infty ff - xx$.

Atque hîc iterum facilè apparet, ſi angulus D O K B E, D O E, D O B E, vel D O K E rectus foret, & ſimul $eel \infty aag$, prædictam curvam fore Circulum. Quæ quidem omnia ſunt, quæ ſupra dicto caſu in triplici ſua variatione demonſtranda erant.

Caſus 3tius, cùm Locus eſt vel Ellipſis vel Circuli circumferentia.

Si verò quantitatum incognitarum ab initio conceptarum alterâ ex æquatione ſublatâ, aliâque ejuſdem loco ſecundùm Regulam aſſumptâ, æquatio ſit $\frac{lyy}{g} \infty ff - vv$, atque ipſa v aſſumpta ſit pro x ȣ notâ aliquâ quantitate; Sit v aſſumpta pro x ȣ h, eritque eo caſu in linea A B vel A F ſumendum punctum I; ita ut A I ſit ∞h. (quod quidem punctum I, ſi v aſſumpta fuerit pro $x - h$, ab A versùs B; ſin contra ab A versùs F ſumi debet.) Quo facto, erit idem punctum I centrum deſcribendæ Ellipſeos, &, mutatis mutandis, cætera omnia, ut ſupra, caſu primo memoratum eſt. Hoc eſt, diameter erit in recta I B, ac ſemi-latus tranſverſum erit ∞f, atque ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut l ad g.

Caſus 4tus, cùm Locus vel Ellipſis vel Circuli circumferentia exiſtit.

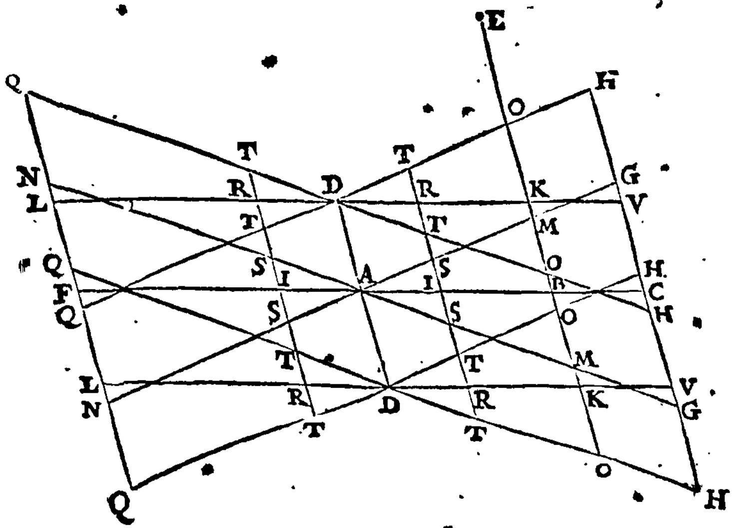
Si denique quantitatum incognitarum primùm conceptarum utrâque ex æquatione ſublatâ, aliiſque earundem loco juxta Regulam aſſumptis, æquatio ſit $\frac{lzz}{g} \infty ff - vv$; atque z primò aſſumpta ſit pro y ȣ c, ducenda eſt utrinque I R, parallela ipſi B E, ac ∞c. Quo facto, erit idem punctum R centrum Ellipſeos, & diameter ejus in recta R K vel R L, eritque ejus ſemi-

§. 1. latus tranſverſum ∞f, ac ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut l ad g. quemadmodum ea omnia Caſu 2do §. 1, mutatis mutandis, fuſiùs explicata ſunt.

§. 2. At ſi z aſſumpta fuerit pro y ȣ $\frac{bx}{a}$, erit punctum S, ubi M A,

vel,

vel, quæ ipſi in directum adjungitur, per prædictam IR, productam, ſi opùs fuerit, interſecatur, centrum Ellipſeos; & cætera omnia, mutatis mutandis, ut ſupra caſu ſecundo §. 2. memoratum eſt. Nempe erit ſectionis diameter in recta SM, (atque ut ibidem erat AM ∞ $\frac{ex}{a}$, ita hîc SM erit $\frac{ev}{a}$: cum ſit ut BA ad AM, hoc eſt, ut a ad e, ita BI, id eſt, v, ad SM:) eritque porrò ſemi-latus tranſ-



verſum ∞ $\frac{ef}{a}$, & ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut eel ad aag.

§. 3. Denique ſi z aſſumpta fuerit pro y 8 c 8 $\frac{bx}{a}$, erit punctum T, in quo DO, vel, quæ ipſi in directum adjungitur, per prædictam IR, productam, ſi opùs fuerit, interſecatur, centrum Ellipſeos; & reliqua omnia, mutatis mutandis, ut paragrapho præcedenti ac ſupra caſu ſecundo §. 3. fuſiùs

fuſiùs explicatum eſt. Nempe erit diameter in recta TO, & ſemi-latus tranſverſum ∞ $\frac{ef}{a}$; ac ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut eel ad aag. Atque eorum omnium demonſtratio in præcedentibus explicitè eſt comprehenſa, cum termini & quantitates omnes hîc cum prioribus conveniant; excepto tantùm, quòd quæ ibidem deſignabantur per x hîc deſignentur per x ☊ h, hoc eſt, v. Ita enim quòd ibi erat AB ∞ x, hîc eſt IB ∞ v; quòd ibi erat DK ∞ x, hîc eſt RK ∞ v; quod ibi erat AM ∞ $\frac{ex}{a}$; hîc eſt SM ∞ $\frac{ev}{a}$; & quod ibi erat DO ∞ $\frac{ex}{a}$; hic eſt TO ∞ $\frac{ev}{a}$.

Quæ quidem omnia ſunt, quæ circa inventionem Loci illo caſu, quo idem vel Ellipſis vel Circuli circumferentia exiſtit, conſideranda veniunt.

Atque ita generali Regulâ caſus omnes inveniendi Loca per æquationes, in quibus neutra quantitatum incognitarum in ſe ducta nec factum ſub iiſdem ad tres dimenſiones aſcendit, ſed vel quadratum vel planum non excedit, complexi ſumus.

F I N I S.

FRANCISCI à SCHOOTEN,
LEIDENSIS,
dum viveret in Academia Lugduno-Batava
Matheſeos Profeſſoris,

TRACTATUS
DE
CONCINNANDIS
DEMONSTRATIONIBUS
GEOMETRICIS,
ex Calculo Algebraïco.

In lucem editus
à
PETRO à SCHOOTEN,
Franciſci Fratre.



AMSTELODAMI,
Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.
Sumptibus Societatis.

Nobiliſſimis & Splendiſſimis Viris, Academiæ Lugdunenſis Curatoribus vigilantiſſimis,

D. AMELIO à BOUCHORST, Wimmenumi Domino, de Ordine Equeſtri in Delegatos Præpotentium Hollandiæ Ordinum adſcripto, & ejuſdem honoratiſſimi Collegii Præſidi, Rhenolandiæ Aggerum Comiti, &c.

D. GERARDO SCHAEP, I. C. Cortenhoevii Domino, Exlegato ad Sereniſſimos Daniæ Sueciæque Reges, antehac in Conſeſſu Ordinum Generalium & Collegii Ordinum Hollandiæ Conſiliariorum Delegato, Magnificæque Reip. Amſtelædamenſis Exconſuli, & nunc Ærarii urbani Præfecto.

D. CORNELIO DE BEVERE, Equiti Aurato, Strevelshoeckii, Weſt-iſſelmondæ, Lindæ, &c. Domino, Exlegato ad Sereniſſimos Magnæ Britanniæ Daniæque Reges, Exconſuli primæ in Hollandiâ Dordrechtanorum Vrbis, in Concilio Præpotentium Hollandiæ Ordinum ordinario Aſſeſſori.

EORVMQVE COLLEGIS,

Ampliſſimis, Spectatiſſimiſque, florentiſſimæ Reipublicæ Leidenſis Conſulibus,

D. CORNELIO à BVYTEVEST.

D. GVILHELMO PAETS, I.C. Aggerum Rhenolandiæ Chomarcho, &c.

D. PAVLO à SWANENBVRG, I. C. in Præpotentium Fœderati Belgii Ordinum Conſeſſu Hollandiæ nomine Delegato & Aſſeſſori.

D. RIPPARDO à GROENENDYCK, I. C.

NEC NON

Ampliſſimo, Conſultiſſimoque Viro,

D. IOHANNI à WEVELINCHOVEN, I. C. Reip. Leidenſis Syndico, & D D. Curatoribus à Secretis.

Nobi-

Nobiliſſimi atque Ampliſſimi Viri, Domini plurimum honorandi,

GEminam aſſequendæ veritatis methodum, quarum altera Syntheſis ſive Compoſitio dicta, altera Analyſis vocata ſive Reſolutio, cumprimis in Matheſi à Veteribus frequentatam tritamque fuiſſe, palam faciunt celebria eorundem monumenta. Quorum imitari exempla cupiens meus p. m. Frater, poſtquam methodo Synthetica ſcientiæ hujus præclara multa publicis tam ſcriptis quam prælectionibus cum fructu tradidiſſet, ad Analyſin quoque, certiſſimam inveniendi artem, ejuſque perficiendæ rationem ſua ſtudia convertit. Neque dubitabat quin pleraque omnia, quæ Veteribus tantum gloriæ peperiſſent, Analyſeos beneficio ac ope reperta eſſent: ſed quæ illi, ut inventorum major admiratio foret, diſſimulato hoc artificio & ſuppreſſo, vulgari tantum Syntheſeos forma exhibuiſſent. Sed cum Veterum diſſimulatione factum videret, hunc Analyticæ methodi præſtantem uſum non modò à multis ignorari ac negligi, ſed ipſam ejus certitudinem ac evidentiam à nonnullis ſuſpectam haberi, atque adeo ſoli Syntheſi miſerando labore inhæreretur: conſultum judicavit hac peculiari diatriba oſtendere, ipſum quoque Syntheticum demonſtrandi modum in Analyſi contineri, atque ex ea elici poſſe; ut eo argumento quemvis convinceret, quantum illa & prævaleat, & præferenda ſit. Sed vix huic tractatui ſupremam impoſuerat manum, cum, proh dolor, vita ejus, atque omnis reliqua de eo expectatio, intercedente fato abrupta fuit. At vero, ut poſthumus idem atque noviſſimus induſtriæ ejus fœtus in publicam lucem, cui deſtinatus erat, rite & honeſte prodire poſſet: ego, ut

defun-

defuncti frater unicus, mei eſſe officii atque pietatis exiſtimavi, non tantum in me recipere editionis promovendæ ac juvandæ curam; ſed etiam pro veneratione & obſervantia, quæ vobis, Nobiliſſimi atque Ampliſſimi Domini, jure multiplici debetur, eundem fœtum inclytæ dignitati veſtræ ac honori conſecrare. Vtique futurum ſpero, ut cujus ingenii primitias, illuſtribus veſtris nominibus olim inſcriptas, propitia benignitate excepiſtis, hunc quoque ultimum ejuſdem fructum gratioſe ſuſcipiatis. Neque ſolita humanitas veſtra obſtare ſinet meam offerentis tenuitatem, qui ſimul hoc quantulòcunque conatu pro veſtris non modo in Fratrem, ſed etiam in p. m. Parentem meum, longi temporis beneficiis meritiſque gratum animum profiteri ac teſtari exoptem. Quod quidem pro illis, meque ipſo, luculentius aliquando me facturum confido, ſi & mihi, à prima ætate ſimilibus ſtudiis innutrito, benevolentiæ & favoris veſtri auram aſpirare contingat. Interim DEUM OPT. MAX. ſuppliciter oro, ut conſilia veſtra & pro Reip. ſalute atque Academiæ decore curas ſecundet, optimiſque ſucceſſibus donet.

Veſtrarum Nobb. & Ampp.

humillimus cliens

PETRUS à SCHOOTEN.

FRAN-

FRANCISCI à SCHOOTEN

Tractatus

De concinnandis Demonſtrationibus Geometricis ex Calculo Algebraïco.

Lectori S.

Quoniam, quæ in Tractatu hoc docentur, evidentiùs per exempla quàm præcepta explicari atque intelligi poſſunt: ſufficere judicavi variis diverſorum generum exemplis rem apertiſſimè exponere, candidéque impertiri. Vale.

Problema.

Datam rectam A B, utcunque ſectam in C, ita producere ad D, ut rectangulum ſub A D, D B comprehenſum æquetur quadrato rectæ C D. *Vide ſequentem figuram.*

Series *Analyſeos* ſive *Reſolutionis*.

Suppoſito Problemate ut jam facto,
voco A C. a
C B. b
& B D vel D E. x: eritque A D. $a+b+x$, & C D. $b+x$.
Deinde ut habeatur æquatio,
Multiplico A D. $a+b+x$
per B D vel D E. x

Eritque rectangulum ſub A D, D B comprehenſum, hoc eſt, ▭ A D E F. $ax+bx+xx$.

Similiter, multiplico CD. $b + x$
per CD vel DG. $b + x$

$$\begin{array}{r} + bx + xx \\ bb + bx \\ \hline \end{array}$$

Et fit quadratum ex CD, hoc eſt, □ CDGH. $bb + 2bx + xx$.

Vnde talis emergit æquatio

$$ax + bx + xx \propto bb + 2bx + xx.$$

Ad quam reducendam tollatur utrinque bx & xx,

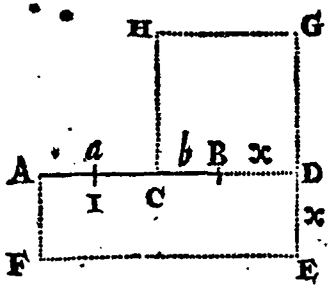
eritque $ax \propto bb + bx$. †

Deinde transferatur bx ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab una, & cognitæ ab altera parte habeantur,

& fit $ax - bx \propto bb$.

Cujus utraque pars ſi dividatur per $a - b$,

invenietur $x \propto \frac{bb}{a-b}$. Hoc eſt, reſolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $a - b$ ad b, ita b ad x.



Id quod docet, ad producendam AB uſque ad D, qualis requiritur, ſumendam eſſe CI æqualem CB, ita ut AI ſit $\propto a - b$; ac deinde ad AI & IC vel CB, hoc eſt, ad $a - b$ & b; eſſe inveniendam 3^{tiam} proportionalem BD.

Vnde tale formari poterit Theorema, ſupponendo rectangulum ADB quadrato ex CD æquale eſſe.

Si AB producatur ad D, ita ut rectangulum ADB ſit æquale quadrato ex CD: erit AC major quàm CB, & exceſſus AI ad IC vel CB eandem habebit rationem, quam CB ad BD.

Cujus demonſtratio eodem ordine procedit quo Analyſis, ſequendo nimirum ejuſdem veſtigia, hoc pacto:

Cum

Cum enim ex hypotheſi ▭ A D B ſit æquale □^to ex C D,

$ax + bx + xx$ ꝏ $bb + 2bx + xx$

ablato utrinque ▭^lo ſub C D & D B,

$bx + xx$

erit [a] ▭ ſub A C & D B æquale ▭^lo ſub C D & C B [b].

ax ꝏ $bb + bx$.

Rurſus auferatur utrinque ▭ ſub I C vel C B & B D, id eſt, bx,

eritque [c] ▭ ſub A I & B D æquale □^to ex C B [d].

$ax - bx$ ꝏ bb.

Hoc eſt, reſolutâ æqualitate in proportionem, erit [e]

ut A I ad I C vel C B, ita C B ad B D.

$a - b$ —— b —— b / x. Quod erat propoſitum.

a per 1 ſecundi.
b per 2 ſecundi.
c per 1 ſecundi.
d per 3 ſecundi.
e per 17 ſexti.

Quoniam autem præſtare videtur, loco horum æqualium rectangulorum conſiderare laterum proportionem, quandoquidem in demonſtrationibus Geometricis, ubi hæ æqualitates vel proportiones ſchematum contemplationi inſuper ſunt aſtringendæ, linearum hæc inter ſe collatio ſimplicior eſt cenſenda quàm planorum aut ſolidorum, ipſaque etiam figuras requirit minùs intricatas, vel ſaltem ratiocinationes, quæ circa illas fiunt, magis liberas reddit: idcirco convertenda erit æqualitas in proportionem atque hæc eòuſque continuanda varièque tranſmutanda, utendo ſc. ad id modis argumentandi libro 5to Elementorum expoſitis, donec appareat quæſitum ex tribus prioribus proportionis terminis conſtare ſeu inveniri poſſe. Quod ipſum ut rectiùs percipiatur, viſum nobis fuit aliam præcedentis Theorematis demonſtrationem hîc afferre, qualis illa à principio uſque ad finem per proportionalia procedit, & prioribus æqualitatibus ad amuſſim reſpondet.

Etenim cum ex hypotheſi ſit

▭ A D B æquale □^to ex C D:

$ax + bx + xx$ ꝏ $bb + 2bx + xx$:

Erit

f per 17 ſexti. Erit[f], reſolvendo æqualitatem in proportionem,

ut AD ad CD, ita CD ad BD.

$a+b+x$ —— $b+x$ —— $b+x$ / x.

Hinc cum ſit

ut totum AD ad totum CD,

$a+b+x$ —— $b+x$

ita ablatum CD ad ablatum BD:

$b+x$ —— x

g per 19 quinti. erit etiam[g]

reliquum AC ad reliquum CB, ut ablatum CD ad ablatum BD.

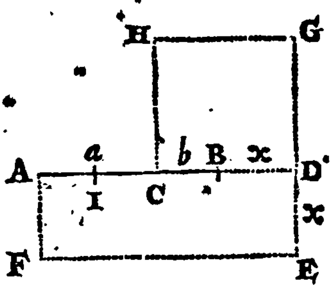
a —— b —— $b+x$ / x.

h per 17 quinti. Et dividendo[h]

ut AI ad IC vel CB, ita CB ad BD

$a-b$ —— b —— b / x. ut proponebatur.

Hinc, ut Problemati huic ſit locus, patet, rectam AC ipſâ CB debere eſſe majorem; atque adeò hanc conditionem Problemati eſſe præfigendam, cum ſine eâ conſtare nequeat, ſi velimus ut quæſitum ex datis inveniatur, utpote ad quod obtinendum BC ex CA eſt ſubtrahenda.



Idem etiam liquet, ſupponendo AC æqualem aut minorem quàm CB. Nam AC æquali exiſtente ipſi CB, non poſſet rectangulum ADB quadrato ex CD æquale eſſe: cum illud[i] unà cum quadrato ex CB ei tantum æquale exiſtat. Et quidem ſi AC ipſâ CB minor ſit, manifeſtum eſt, rectangulum ADB quadrato ex CD tunc adhuc multò minus fore.

i per 6 ſecundi.

Cum igitur conſtet Determinatio, Problema conſtruetur hoc modo:

Conſtructio.

Aſſumptâ CI æquali CB, ſi fiat ut reliqua AI ad IC vel CB, ita CB ad BD: dico rectangulum ADEF,

quod

quod ſub A D & D B ſeu D E comprehenditur, æquale eſſe quadrato C D G H, à recta C D deſcripto.

Quod ipſum retrogrado ordine fit manifeſtum, incipiendo ab Analyſeos fine & per ejuſdem veſtigia redeundo ad illius principium.

NOTA Hujus atque ſequentium Problematum Compoſitiones retro legendas eſſe.

Finis *Compoſitionis.*

habebitur [k]

▭ ſub A D & D B ſeu A D E F æquale □^{to} ex C D ſeu C D G H [l].

$$ax + bx + xx \quad \infty \quad bb + 2bx + xx.$$

Quod erat faciendum.

Rurſus addito utrinque ▭^{lo} ſub C D & D B, id eſt, $bx + xx$,

fiet [m] ▭ ſub A C & D B æquale ▭^{lo} ſub C D & C B [n].

$$ax \quad \infty \quad bb + bx.$$

Deinde addito utrinque ▭^{lo} ſub I C vel C B & B D, id eſt, bx, ut in alteram tranſeat partem,

erit [o] ▭ ſub A I & B D æquale □^{to} ex C B.

$$ax - bx \quad \infty \quad bb.$$

revocatâ proportione ad æqualitatem,

ut A I ad I C vel C B, ita C B ad B D:

$$a-b \text{———} b \text{———} b \,/\, x$$

Etenim cum ex Conſtructione ſit

Principium *Compoſitionis.*

Alia ejuſdem Problematis Compoſitio, per veſtigia proportionalium ſecundæ Reſolutionis regrediens.

Finis *Compoſitionis.*

erit [p] ▭ ſub A D & B D ſeu A D E F æquale □^{to} ex C D ſeu C D G H.

$$ax + bx + xx \quad \infty \quad bb + 2bx + xx.$$

Quod erat faciendum.

id eſt, revocatâ proportione ad æqualitatem,

k *per* 1 *ſecundi.*
l *per* 2 *ſecundi.*
m *per* 1 *ſecundi.*
n *per* 3 *ſecundi.*
o *per* 17 *ſexti.*
p *per* 17 *ſexti.*

q per 12 quinti. erit etiam [q]

ut AD ſumma antec. ad CD ſummã conſ., ita CD una antec. ad BD unam conſeq.

$a+b+x$ —— $b+x$ —— $b+x$ —— x

ita CD anteced. ad BD conſequentem:

$b+x$ —— x

Hinc cum ſit ut AC antec. ad CB conſeq.,

a —— b

ut AC ad CB, ita CD ad BD.

a —— b —— $b+x$ / x.

erit [r] componendo

r per 18 quinti. ut AI ad IC vel CB, ita CB ad BD:

a — b —— b —— b / x

Cum enim ex conſtructione ſit

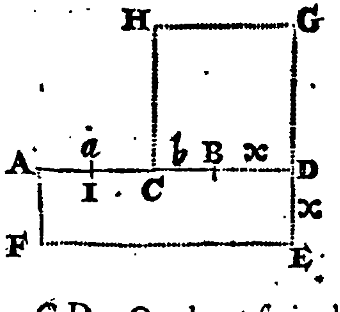
Principium *Compoſitionis*

His igitur ita ſe habentibus, ſi velimus, ut, neglecto artificio, quo tum Conſtructio Problematis, tum ejus demonſtratio fuit inventa, tantummodo conſtet, allatâ Conſtructione quæſitum ſemper obtineri: poterimus, calculi veſtigiis nunc prætermiſſis, hujuſmodi ad id afferre demonſtrationem:

Demonſtratio.

Cum enim ex conſtructione AI ſit ad IC vel CB, ſicut CB

s per 17 ſexti. ad BD: erit [s] rectangulum ſub extremis AI & BD æquale quadrato mediæ CB. Quibus ſi addatur commune rectangulum ſub IC vel CB & BD, erit & [t] rectangulum ſub AC & BD [u] æquale rectangulo ſub CD & CB. His igitur ſi rurſus addatur commune rectangulum ſub CD & DB, erit ſimiliter [x] rectangulum ſub AD & DB ſeu ADEF [y] æquale quadrato ex CD. Quod erat faciendum.



t per 1 ſecundi.
u per 3 ſecundi.
x per 2 ſecundi.
y per 2 ſecundi.

Vel

Vel etiam ſic:

Cum ex conſtructione AI ſit ad IC vel CB, ſicut CB ad BD: erit componendo [a] AC ad CB, ſicut CD ad BD. Sed ut una antecedentium CD ad unam conſequentium BD, ita ſunt [b] antecedentes AC & CD ſimul, id eſt, tota AD, ad conſequentes CB & BD ſimul, id eſt, ad totam CD. Æqualia igitur ſunt [c] quadratum CD & rectangulum ADB. Quod erat faciendum.

a per 18 quinti.
b per 12 quinti.
c per 17 ſexti.

Quoniam itaque Problemate ad æquationem perducto Algebræ munus eſt eam deinde juxta certas regulas tranſmutare, ſervando ſemper æqualitatem, ſic ut tandem conſtet, quo pacto illius ope quæſita quantitas ex datis inveniri poſſit: non inconveniens duxi, ſi unà hîc oſtenderem, quibus modis aliquot illius uſitatiores tranſmutationes in proportiones reſolvi queant, cum hæ, ut ſupra monitum fuit, in Problematis Geometricè reſolvendis ac in Theorematîs ſolito more demonſtrandis, concinniores ſint judicandæ; præſertim ubi eadem æqualitas ad tres pluresve dimenſiones aſcendit, atque idcirco illa cuique minùs obvia eſt, quâ ratione per Geometriæ Elementa ſit explicanda.

Typus aliquot æquationum, ſecundùm Algebræ leges reductarum, & earundem in proportiones correſpondentes reſolutio; tam ad Problematum Reſolutiones Geometricas ex calculo eliciendas, quàm ad Theorematum Demonſtrationes ex eodem componendas, utilis.

Reductiones Algebraïcæ	*Reſolutiones Geometricæ.*
Si fuerit $ax \infty bc$: dividatur utrinque per a, fit $x \infty \frac{bc}{a}$.	erit [d] ut a ad b, ita c ad x. vel permutatim ut a ad c, ita b ad x.
Si ſit $ax \; 8 \; bx \infty cd$: dividatur utrinque per $a \; 8 \; b$, fit $x \infty \frac{cd}{a \; 8 \; b}$.	erit [e] ut $a \; 8 \; b$ ad c, ita d ad x. vel permutatim ut $a \; 8 \; b$ ad d, ita c ad x.

d per 16 ſexti.
e per 16 ſexti.

Si

f per 16 ſexti.

Si ſit $ax \infty bc\ 8\ dc$: dividatur utrinque per a. fit $x \infty \frac{bc\ 8\ dc}{a}$.

erit [f] ut a ad $b\ 8\ d$, ita c ad x. vel permutatim ut a ad c, ita $b\ 8\ d$ ad x.

g per 16 ſexti.

Si ſit $ax\ 8\ bx \infty cd\ 8\ ed$: dividatur utrinque per $a\ 8\ b$ fit $x \infty \frac{cd\ 8\ ed}{a\ 8\ b}$.

erit [g] ut $a\ 8\ b$ ad $c\ 8\ e$, ita d ad x. vel permutatim ut $a\ 8\ b$ ad d, ita $c\ 8\ e$ ad x.

h per 16 ſexti.

Si ſit $ax \infty bb - cc$: dividatur utrinque per a fit $x \infty \frac{bb - cc}{a}$.

erit [h] ut a ad $b + c$, ita $b - c$ ad x. vel permutatim ut a ad $b - c$, ita $b + c$ ad x.

*i per 16 ſexti. * Vt ſupra ad notam † k per 17 quinti.*

Si ſit $ax \infty bb + bx$: * auferatur utrinque bx eritque $ax - bx \infty bb$. dividatur utrinque per $a - b$ fit $x \infty \frac{bb}{a - b}$.

erit [i] ut a ad b, ita $b + x$ ad x. & dividendo [k] ut $a - b$ ad b, ita b ad x.

l per 16 ſexti. m per 18 quinti.

Si ſit $ax \infty bb - bx$: addatur utrinque bx: eritque $ax + bx \infty bb$. dividatur utrinque per $a + b$ fit $x \infty \frac{bb}{a + b}$.

erit [l] ut a ad b, ita $b - x$ ad x. & componendo [m] ut $a + b$ ad b, ita b ad x.

n per 16 ſexti. o per 17 quinti. p vide Clavium ad 18 quinti.

Si ſit $ax - ac \infty bx$: addito utrinque ac erit $ax \infty bx + ac$. auferatur utrinque bx eritque $ax - bx \infty ac$. dividatur utrinque per $a - b$ fit $x \infty \frac{ac}{a - b}$.

erit [n] ut a ad b, ita x ad $x - c$. & dividendo [o] ut $a - b$ ad b, ita c ad $x - c$. & per compoſitionem rationis contrariam [p] ut $a - b$ ad a, ita c ad x.

q per 16 ſexti. r per 17 quinti.

Si ſit $ax - ac \infty bx + bc$: addito utrinque ac erit $ax \infty bx + bc + ac$. auferatur utrinque bx eritque $ax - bx \infty bc + ac$.

erit [q] ut a ad b, ita $x + c$ ad $x - c$. & dividendo [r] ut $a - b$ ad b, ita $2c$ ad $x - c$. Vbi liquet, etiamſi 4[tus] hîc terminus proportionalis quantitatem

dividatur utrinque per $a-b$

fit $x \infty \frac{bc+ac}{a-b}$.

Si ſit $ac+ax \infty bc-bx$:

addito utrinque bx

erit $ac+ax+bx \infty bc$.

auferatur utrinque ac

eritque $ax+bx \infty bc-ac$.

dividatur utrinque per $a+b$

fit $x \infty \frac{bc-ac}{a+b}$.

tem quæſitam x ſeorſim non exhibeat, ipſam tamen ex tribus prioribus, qui quidem omnes ſunt cogniti, inveniri poſſe. Id quod ſimiliter de præcedenti ac ſequenti formula aliisque eſt intelligendum.

At verò ſi ipſa x quarto loco ſeparatim deſideretur, licebit ulteriùs ſic argumentari.

α Haud ſecus, cùm ſit

ut a ad b, ita $x+c$ ad $x-c$,

erit invertendo [a]

ut b ad a, ita $x-c$ ad $x+c$.

& per compoſitionem rationis contrariam [b]

ut b ad $b+a$, ita $x-c$ ad $2x$.

Hinc cum $a-b$ —— b .... $b+a$ ſint 3 magnitudines ab una parte,

& $2c$ —— $x-c$ .... $2x$

tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem ſunt ratione, quarumque proportio eſt ordinata: erunt ipſæ quoque [c] ex æqualitate in eadem ratione, hoc eſt,

$a-b$ ad $b+a$, ſicut $2c$ ad $2x$ ſeu c ad x. [d]

erit [e] ut a ad b, ita $c-x$ ad $c+x$. α

& componendo [f]

ut $a+b$ ad b, ita $2c$ ad $c+x$.

Rurſus cum ſit

α ut a ad b, ita $c-x$ ad $c+x$,

erit invertendo [g]

ut b ad a, ita $c+x$ ad $c-x$.

& per converſionem rationis [h]

ut b ad $b-a$, ita $c+x$ ad $2x$.

a per Coroll. 4 quinti.

b vide Clavium ad 18 quinti.

c per 22 quinti.

d per 15 quinti.

e per 16 ſexti.

f per 18 quinti.

g per Coroll. 4 quinti.

h per Coroll. 19 quinti.

Hinc cum $a+b$ —— b.... b—
ſint 3 magnitudines ab una parte,
& $2c$ —— $c+x$.... $2x$
tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem ſunt ratione, quarumque proportio eſt ordinata: erunt ipſæ quoque [i] ex æqualitate in eadem ratione, hoc eſt,
$a+b$ ad $b-a$, ſicut $2c$ ad $2x$ ſeu c ad x.[k]

i per 22 quinti.
k per 15 quinti.
l per 16 ſexti.
m per 17 quinti.
n per Cor. 4 quinti.
o vide Clavium ad 18 quinti.

Si ſit $ax + ac \infty bx - bc$:
addito utrinque bc
erit $ax + ac + bc \infty bx$.
auferatur utrinque ax
eritque $ac + bc \infty bx - ax$.
dividatur utrinque per $b-a$
fit $\frac{ac+bc}{b-a} \infty x$.

erit [l] ut b ad a, ita $x+c$ ad $x-c$.α
& dividendo [m]
ut $b-a$ ad a, ita $2c$ ad $x-c$.
Rurſus cum ſit
α ut b ad a, ita $x+c$ ad $x-c$,
erit invertendo [n]
ut a ad b, ita $x-c$ ad $x+c$.
& per compoſitionem rationis contrariam [o]
ut a ad $a+b$, ita $x-c$ ad $2x$.
Hinc cum $b-a$ —— a...... $a+b$
ſint 3 magnitudines ab una parte,
& $2c$ —— $x-c$...... $2x$,
tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem ſunt ratione, quarumque proportio eſt ordinata: erunt ipſæ quoque [p] ex æqualitate in eadem ratione, hoc eſt,
$b-a$ ad $a+b$, ſicut $2c$ ad $2x$ ſeu c ad x.[q]

p per 22 quinti.
q per 15 quinti.
r per 16 ſexti.
s per 18 quinti.
t per Cor. 4 quinti.
u per Cor. 19 quinti.

Si ſit $ac - ax \infty bx + bc$:
addito utrinque ax
erit $ac \infty bx + ax + bc$.
auferatur utrinque bc
eritque $ac - bc \infty bx + ax$.
dividatur utrinque per $b+a$
fit $\frac{ac-bc}{b+a} \infty x$

erit [r] ut b ad a, ita $c-x$ ad $x+c$.α
& componendo [s]
ut $b+a$ ad a, ita $2c$ ad $x+c$.
Rurſus cum ſit
α ut b ad a, ita $c-x$ ad $x+c$,
erit invertendo [t]
ut a ad b, ita $x+c$ ad $c-x$.
& per converſionem rationis [u]
ut a ad $a-b$, ita $x+c$ ad $2x$.
Hinc

Hinc cum $b+a$ —— a ..... $a-b$
ſint 3 magnitudines ab una parte,
& $2c$ —— $x+c$ ..... $2x$
tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem ſunt ratione, quarumque proportio eſt ordinata: erunt ipſæ quoque [a] ex æqualitate in eadem ratione, hoc eſt, [a per 22 quinti.]

$b+a$ ad $a-b$, ſicut $2c$ ad $2x$ ſeu c ad x.[b] [b per 15 quinti.]

Si ſit $ax-ac \infty bc-bx$:
addito utrinque ac
erit $ax \infty bc+ac-bx$.
addatur utrinque bx
eritque $ax+bx \infty bc+ac$.
dividatur utrinque per $a+b$
fit $x \infty c$.

erit [c] ut a ad b, ita $c-x$ ad $x-c$. Vnde concluditur c eſſe ∞ x. Nam minor eſſe non poteſt, quoniam componendo [d] foret, ut $a+b$ ad b, ita o ad $x-c$. quod eſt abſurdum. Similiter major eſſe nequit, quandoquidem per compoſitionem rationis contrariam [e] foret ut a ad $a+b$, ita $c-x$ ad o. quod perinde abſurdum eſt. Nec aliter ſe res habet in ſequenti formula. [c per 16 ſexti.] [d per 18 quinti.] [e vide Clavium ad 18 quinti.]

Si ſit $ac-ax \infty bx-bc$:
addito utrinque ax
erit $ac \infty ax+bx-bc$.
addatur utrinque bc
eritque $ac+bc \infty ax+bx$.
dividatur utrinque per $a+b$
fit $c \infty x$.

erit [f] ut a ad b, ita $x-c$ ad $c-x$. Vnde rurſus ut ante concluditur c eſſe ∞ x: cum nec major nec minor eſſe poſſit. [f per 16 ſexti.]

Cum igitur in reſolvendo Problemate appareat, ſupponendo illud ipſum ut jam factum, quo pacto quis argumentari poſſit, ut id quod in eo quæritur ex datis inveniat: ritè me facturum judicavi, ſi ulteriùs hîc oſtenderem, quâ ratione præcedentium reductionum veſtigiis inſiſtendo per illa eadem retrogradi liceat, ad æquationes propoſitas, quas ipſius Problematis conditiones adimplere ſuppono, Geometricè componendas.

Typus veſtigiorum, juxta quæ æquationes ſuperiùs reductæ ac reſolutæ rurſus componuntur, initium faciendo à fine reductionis & per eadem veſtigia regrediendo; ad Compoſitiones Geometricas ex calculo eruendas utilis.

	Compoſitiones Algebraïcæ	*Compoſitiones Geometricæ*
a per 16 ſexti.	fit $ax \propto bc$.	erit[a] $ax \propto bc$.
	multiplicetur utrinque per a	facto rectangulo tum ſub extremis tum ſub mediis

Si fuerit $x \propto \frac{bc}{a}$: h.e., ſi ſit ut a ad b, ita c ad x; vel permutatim a ad c, ita b ad x:.

b per 16 ſexti.	fit $ax \pm bx \propto cd$.	erit[b] $ax \pm bx \propto cd$.
	multiplicetur utrinque per $a \pm b$	facto rectangulo tum ſub extremis tum ſub mediis

Si ſit $x \propto \frac{cd}{a \pm b}$: h.e., ſi ſit ut $a \pm b$, ad c, ita d ad x; vel permutatim $a \pm b$ ad d, ita c ad x:

c per 16 ſexti.	fit $ax \propto bc \pm dc$.	erit[c] $ax \propto bc \pm dc$.
	multiplicetur utrinque per a	facto rectangulo tum ſub extremis tum ſub mediis

Si ſit $x \propto \frac{bc \pm dc}{a}$: h.e., ſi ſit ut a ad $b \pm d$, ita c ad x; vel permutatim a ad c, ita $b \pm d$ ad x:

d per 16 ſexti.	fit $ax \pm bx \propto cd \pm ed$.	erit[d] $ax \pm bx \propto cd \pm ed$.
	multiplicetur per $a \pm b$	facto rectangulo tum ſub extremis tum ſub mediis

Si ſit $x \propto \frac{cd \pm ed}{a \pm b}$: h.e., ſi ſit ut $a \pm b$ ad $c \pm e$, ita d ad x; vel permutatim $a \pm b$ ad d, ita $c \pm e$ ad x:

e per 16 ſexti.	fit $ax \propto bb - cc$.	erit[e] $ax \propto bb - cc$.
	multiplicetur utrinque per a	facto rectangulo tum ſub extremis tum ſub mediis

Si ſit $x \propto \frac{bb - cc}{a}$: h.e., ſi ſit ut a ad $b + c$, ita $b - c$ ad x; vel permutatim a ad $b - c$, ita $b + x$ ad x:

fit

ſit $ax \infty bb + bx$.
addatur utrinque bx
eritque $ax - bx \infty bb$.
multiplicetur utrinque per $a - b$

erit[f] $ax \infty bb + bx$.
id eſt, reducendo proportionem ad æqualitatem
ut a ad b, ita $b + x$ ad x.
erit componendo[g]

Si ſit $x \infty \frac{bb}{a-b}$: hoc eſt, ſi ſit ut $a - b$ ad b, ita b ad x: ‡

f per 16. ſexti.
g per 18 quinti. Vt ſupra ad notam ‡

ſit $ax \infty bb - bx$.
auferatur utrinque bx
eritque $ax + bx \infty bb$.
multiplicetur utrinque per $a+b$

erit[h] $ax \infty bb - bx$.
id eſt, reducendo proportionem ad æqualitatem
ut a ad b, ita $b - x$ ad x.
erit dividendo[i]

Si ſit $x \infty \frac{bb}{a+b}$: hoc eſt, ſi ſit ut $a + b$ ad b, ita b ad x:

h per 16 ſexti.
i per 17 quinti.

ſit $ax - ac \infty bx$.
auferatur utrinque ac
eritque $ax \infty bx + ac$.
addatur utrinque bx
erit $ax - bx \infty ac$.
multiplicato utrinque per $a - b$

erit[k] $ax - ac \infty bx$.
id eſt, reducendo proportionem ad æqualitatem
ut a ad b, ita x ad $x - c$.
& componendo[l]
ut $a - b$ ad b, ita c ad $x - c$.
erit per diviſionem rationis contrariam[m]

Si ſit $x \infty \frac{ac}{a-b}$: hoc eſt, ſi ſit ut $a - b$ ad a, ita c ad x:

k per 16 ſexti.
l per 18 quinti.
m vide Clavium ad 17 quinti.

erit[n] $ax - ac \infty bx + bc$.
id eſt, reducendo proportionem ad æqualitatem,
ut a ad b, ita $x + c$ ad $x - c$
& componendo[o]
ut $a - b$ ad b, ita $2c$ ad $x - c$.
vel, ſumptis conſequentium ſemiſſibus,[p]
ut $a - b$ ad $2b$, ita $2c$ ad $2x - 2c$.
id eſt, per diviſionem rationis contrariam,[q]

ſit $ax - ac \infty bx + bc$.
auferatur utrinque ac.
eritque $ax \infty bx + bc + ac$.
addatur utrinque bx
erit $ax - bx \infty bc + ac$.

n per 16 ſexti.
o per 18 quinti.
p vide Clavium ad 22 quinti.
q vide Clavium ad 17 quinti.

r per 15. quinti.

multiplicato utrinque per $a-b$ | ut $a-b$ ad $b+a$, ita $2c$ ad $2x$. erit etiam [r]

Si ſit $x \infty \frac{bc+ac}{a-b}$: hoc eſt, ſi ſit ut $a-b$ ad $b+a$, ita c ad x:

s per 16 ſexti.

erit [s] $ac+ax \infty bc-bx$.
id eſt, reducendo proportionem ad æqualitatem,
ut a ad b, ita $c-x$ ad $c+x$.

t per 17 quinti.

& dividendo [t]
ut $a+b$ ad b, ita $2c$ ad $c+x$.
vel, ſumptis conſequentium ſemiſſibus, [u]
ut $a+b$ ad $2b$, ita $2c$ ad $2c+2x$.
id eſt, per compoſitionem rationis contrariam, [x]
ut $a+b$ ad $b-a$, ita $2c$ ad $2x$.
erit etiam [y]

u vide Clavium ad 22 quinti.
x vide Clavium ad 18 quinti.
y per 15 quinti.

fit $ac+ax \infty bc-bx$.
auferatur utrinque bx
eritque $ac+ax+bx \infty bc$.
addatur utrinque ac
erit $ax+bx \infty bc-ac$.
multiplicato utrinque per $a+b$

Si ſit $x \infty \frac{bc-ac}{a+b}$: hoc eſt, ſi ſit ut $a+b$ ad $b-a$, ita c ad x:

z per 16 ſexti.

erit [z] $ax+ac \infty bx-bc$.
id eſt, reducendo proportionem ad æqualitatem,
ut b ad a, ita $x+c$ ad $x-c$.

a per 18 quinti.

& componendo [a]
ut $b-a$ ad a, ita $2c$ ad $x-c$.
vel, ſumptis conſequentium ſemiſſibus, [b]
ut $b-a$ ad $2a$, ita $2c$ ad $2x-2c$.
id eſt, per diviſionem rationis contrariam, [c]
ut $b-a$ ad $a+b$, ita $2c$ ad $2x$.
erit etiam [d]

b vide Clavium ad 22 quinti.
c vide Clavium ad 17 quinti.
d per 15 quinti.

fit $ax+ac \infty bx-bc$.
auferatur utrinque bc.
eritque $ax+ac+bc \infty bx$.
addatur utrinque ax
erit $ac+bc \infty bx-ax$.
multiplicato utrinque per $b-a$

Si ſit $\frac{ac+bc}{b-a} \infty x$: hoc eſt, ſi ſit ut $b-a$ ad $a+b$, ita c ad x:

fit

erit [e] $ac - ax \infty bx + bc$.
id eſt, reducendo proportionem ad æqualitatem
ut b ad a, ita $c - x$ ad $x + c$.
& dividendo [f]
ut $b + a$ ad a, ita $2c$ ad $x + c$.
vel, ſumptis conſequentium ſemiſſibus, [g]
ut $b + a$ ad $2a$, ita $2c$ ad $2x + 2c$.
id eſt, per compoſitionem rationis contrariam, [h]
ut $b + a$ ad $a - b$, ita $2c$ ad $2x$.
erit etiam [i]

e per 16 ſexti.
f per 17 quinti.
g vide Clavium ad 22 quinti.
h vide Clavium ad 18 quinti.
i per 15 quinti.

fit $ac - ax \infty bx + bc$.
auferatur utrinque ax
eritque $ac \infty bx + ax + bc$.
addatur utrinque bc
erit $ac - bc \infty bx + ax$.
multiplicato utrinque per $b + a$

Si ſit $\frac{ac - bc}{b + a} \infty x$: hoc eſt, ſi ſit ut $b + a$ ad $a - b$, ita c ad x:

fit $ax - ac \infty bc - bx$.
auferatur utrinque ac
eritque $ax \infty bc + ac - bx$.
auferatur utrinque bx
erit $ax + bx \infty bc + ac$.
multiplicato utrinque per $a + b$

Si ſit $x \infty c$: ſeu, quod idem eſt, ſi x ſit ad c, ſicut $a + b$ ad $a + b$:

fit $ac - ax \infty bx - bc$.
auferatur utrinque ax
eritque $ac \infty ax + bx - bc$.
auferatur utrinque bc
erit $ac + bc \infty ax + bx$.
multiplicato utrinque per $a + b$

Si ſit $c \infty x$: ſeu, quod idem eſt, ſi c ſit ad x, ſicut $a + b$ ad $a + b$:

Cum in duabus præcedentibus formulis non occurrat quâ viâ per proportionales, ut ante, ad æquationes priores perveniatur: licebit per æqualitatem procedere, æqualia per æqualia multiplicando, ac deinde ab æqualibus æqualia auferendo, omnino ut in Compoſitionibus hiſce Algebraïcis factum eſt.

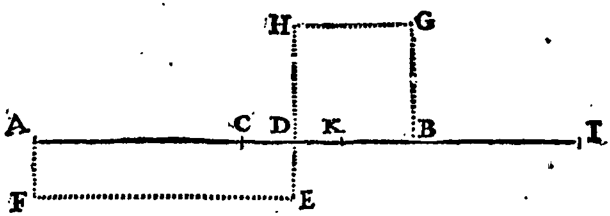
PRO-

PROBLEMA.

Datam rectam AB, utcunque ſectam in C, rurſus ſecare in D; ita ut rectangulum ſub AD, DC comprehenſum ſit æquale quadrato ex DB.

Series *Analyſeos* ſive *Reſolutionis*.

Suppoſito Problemate ut jam facto,
voco AC. a
CB. b
& CD. x; eritque AD ∞ $a+x$, & DB ∞ $b-x$.



Deinde ut habeatur æquatio,
Multiplico AD. $a + x$
per DC ſeu DE. x
Et fit rectangulum ADEF. $ax+xx$.
Similiter multiplico DB. $b - x$
per DB ſeu BG. $b - x$
$-bx+xx$
$bb-bx$
Et fit quadratum DBGH. $bb-2bx+xx$.
Vnde talis exurgit æquatio
$ax+xx \infty bb-2bx+xx$.
Ad quam reducendam tollatur utrinque xx,
eritque $ax \infty bb-2bx$.

Deinde transferatur $2bx$ ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab una parte habeantur, & cognitæ ab altera parte, & fit $ax+2bx \infty bb$.

Cujus

Cujus utraque pars ſi dividatur per $a + 2b$,

invenietur $x \propto \frac{bb}{a+2b}$. Hoc eſt, reſolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $a + 2b$ ad b, ita b ad x.

Id quod docet, ad ſecandam A B in D, qualis requiritur, producendam eſſe A B ad I, ita ut B I ſit æqualis B C; ac deinde ad A I & I B vel B C inveniendam eſſe 3tiam proportionalem, hoc eſt, ut A I ſit ad I B vel B C, ſicut B C ad C D.

Vt autem pateat demonſtratio, repetantur Analyſeos veſtigia. Si enim per hæc ipſa regrediamur, incipiendo ab ejus fine & deſinendo ubi illa initium ſumpſit, inventa ſimul erit via à dato ſeu conceſſo perveniendi ad quæſitum. In quem igitur finem binas ſequentes compoſitiones, quarum altera Algebræ, altera Geometriæ genuina eſt, ob oculos ponere viſum fuit, adhibitâ utriuſque calculi interpretatione ſive ad figuram relatione.

Compoſitio Algebraïca.	*Compoſitio Geometrica.*
Finis *Compoſitionis.*	
	▭ A D, C D vel A D E F
▭ A D, C D vel A D E F	Et ſit, *per* 3. 2di, $ax + xx \propto$
& ſit $ax + xx \propto$	□ D B vel D B G H.
□ D B vel D B G H.	$bb - 2bx + xx$. *per* 6. 2di, [a]
$bb - 2bx + xx$.	□ C D vel D K
□ C D vel D K	Addatur utrinque xx
Addatur utrinque xx,	▭ A C D ▭ C B K [b]
▭ A C, C D	erit, *per* 16. 6ti. $ax \propto bb - 2bx$.
eritque [c] $ax \propto$	Id eſt, reductâ proportione ad æqualitatem,
(□DB—□ C D vel D K) i.e. [d],	AC CB BK KD vel CD
▭CBK	ut a ad b, ita $b - 2x$ ad x.
$bb - 2bx$.	Et, ſumptis conſequentium ſemiſſibus, *vide Clavium ad* 22 5ti.
▭CI,CD vel [e] ▭CDI+□CD	AC CI BK KC
Auferatur utrinque $2bx$,	ut a ad $2b$, ita $b - 2x$ ad $2x$.
▭AI,CD □ I B vel B C	Vnde dividendo erit, *per* 17 *quinti.*
erit [f] $ax + 2bx \propto bb$.	AI IC BC 2 CD vel CK
	ut $a+2b$ ad $2b$, ita b ad $2x$. id

a *per* 3 *ſecundi.*
b *per* 6 *ſecundi.*
c *per* 5 *ſecundi.*
d *per* 1 *ſecundi.*
e *per* 3 *ſecundi.*
f *per* 17 *ſexti.*

id eſt, reductâ proportione ad æqualitatem, ſive, ſumptis conſequentium duplis, *vide Clavium ad* 22. 5[ti].

AI IB BC CD

Ex conſtructione eſt, ut $a+2b$ ad b, ita b ad x.

Principium *Compoſitionis*.

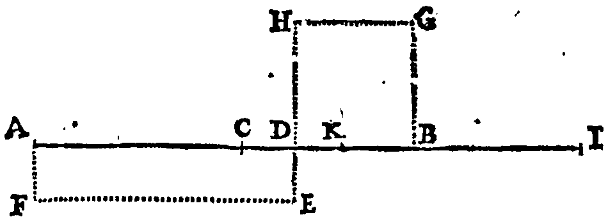
Adapertâ itaque tum ad Conſtructionem tum ad Demonſtrationem viâ, licebit Problema conſtruere atque dupliciter demonſtrare, ut ſequitur.

Conſtructio.

Productâ AB ad I, donec BI ſit æqualis BC: fiat ut AI ad IB vel BC, ita BC ad CD: dico rectangulum ADC ſeu ADEF quadrato DB ſeu DBGH æquale eſſe.

Demonſtratio.

Cum enim ex conſtructione AI ſit ad IB vel BC, ut BC ad
g per 17 ſexti. CD: erit [g] rectangulum ſub extremis AI, CD, id eſt, [h] re-
h per 1 ſecundi. ctangulum ſub AC, CD unà cum rectangulo ſub CI, CD, æquale quadrato mediæ IB vel BC. A quibus ſi commune aufe-



ratur rectangulum ſub CI, CD: erit reliquum rectangulum ſub AC, CD æquale BC quadrato, dempto eidem rectangulo ſub
i per 3 ſecundi. CI, CD, id eſt, [i] rectangulo CDI unà cum quadrato CD.
k per 5 ſecundi. At cum dempto CDI rectangulo à quadrato CB vel BI relinquatur quadratum DB: patet dictum rectangulum ACD quadrato DB æquale eſſe minus quadrato CD. Hinc cum, ſumendo

mendo

mendo C D & D K æquales, quadratum D B minus quadrato C D vel D K[l] æquale ſit rectangulo C B K: manifeſtum eſt, ſi æqualibus hiſce rectangulis A C D & C B K addatur commune quadratum C D vel D K, etiam totum toti æquale eſſe, id eſt, [m] rectangulum A D C ſeu A D E F ipſi D B quadrato ſeu D B G H. Quod erat faciendum.

l *per 6 ſecundi.*
m *per 3 ſecundi.*

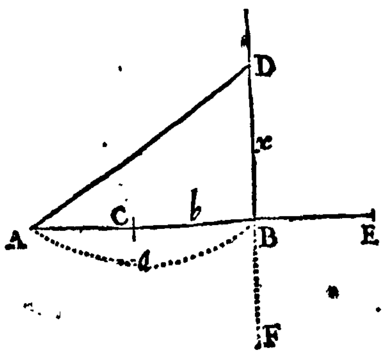
Vel ſic:

Cum ex conſtructione ſit ut A I ad I B, ita B C ad C D: erit quoque, ſumptis conſequentium duplis, [n] ut A I ad I C, ita B C ad 2 C D ſeu C K; & dividendo [o] ut A C ad C I, ita B K ad K C; id eſt, ſumptis conſequentium ſemiſſibus. [p] ut A C ad C B, ita B K ad K D vel C D. Æquale igitur eſt [q] rectangulum ſub extremis A C, C D rectangulo ſub mediis C B, B K. Quibus ſi addatur commune quadratum C D vel D K, erit & totum toti æquale, id eſt, [r] rectangulum A D C ſeu A D E F ipſi quadrato D B ſeu D B G H[s]. Quod erat faciendum.

n *vide Clavium ad 22 quinti.*
o *per 17 quinti.*
p *vide Clavium ad 22 quinti.*
q *per 16 ſexti.*
r *per 3 ſecundi.*
s *per 6 ſecundi.*

PROBLEMA.

Datâ rectâ A B utcunque ſectâ in C, erectâque ex ejus termino B ſuper ipſa perpendiculari indefinitâ B D: ex altero ejus termino A rectam lineam ducere A D, huic occurrentem in D; ita ut ipſa æqualis ſit rectis D B, B C ſimul ſumptis.



Series *Analyſeos.*

Ponatur factum quod quæritur,
ſitque A B ꝏ *a*
C B ꝏ *b*
& B D ꝏ *x*: eritque
A D ꝏ *b* + *x*.

Hinc cum angulus ad B ſit rectus, erit [a] quadratum ex A D æquale binis quadratis ex A B & B D.

a *per 47 Primi.*

Vnde talis reſultat æquatio

$\square AD \quad \square AB + \square BD$

$bb + 2bx + xx \propto aa + xx.$

Ad quam reducendam, tollatur utrinque xx,

eritque $bb + 2bx \propto aa.$

Deinde transferatur bb ad alteram partem, ut incognita quantitas ab una parte habeatur & reliquæ ab altera parte,

& fit $2bx \propto aa - bb.$

Cujus utraque pars ſi dividatur per $2b$,

obtinebitur $x \propto \frac{aa - bb}{2b}$. Hoc eſt, reſolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $2b$ ad $a + b$, ita $a - b$ ad x.

Quod ipſum docet, ad Problema hoc ſolvendum, prout BE in directum ipſius AB ſumpta eſt æqualis BC, opùs tantùm eſſe, ad CE, AE, & AC invenire 4tam proportionalem BD.

Ad inveniendam autem demonſtrationem, fiat repetitio veſtigiorum Analyſeos, incipiendo ab ejus fine & per eadem veſtigia progrediendo uſque ad ipſius initium; ita videlicet, ut quod in Analyſi ſeu Reſolutione addendum præcipitur, id in Syntheſi ſeu Compoſitione ſubtrahatur, & contra: cum Analyſis & Syntheſis directè omnino ſibi invicem opponantur.

Finis *Compoſitionis*:

Vnde & ipſæ rectæ FD & AD.

Æqualia igitur ſunt □ FD & □ AD.

b per 47 primi. □FB + 2▭FBD + □BD, vel □FD [b]. □AB + □BD, vel □AD [c].

c per 4 ſecundi. Et fit $bb + 2bx + xx \propto aa + xx.$

□BD

Rurſus addatur utrinque xx,

d per 6 ſecundi. □FB + 2▭FBD □AB [d].

eritque $bb + 2bx \propto aa.$

□FB vel BC

Addatur utrinque bb,

▭CE, BD ſeu 2▭FBD ▭EAC.

e per 16 ſexti. erit [e] $2bx \propto aa - bb$

id eſt,

id eſt, reductâ proportione ad æqualitatem, ſumptâque F B æquali B C,

CE AE AC BD
Ex conſtructione eſt ut 2 b ad $a+b$, ita $a-b$ ad x.

Principium *Compoſitionis*.

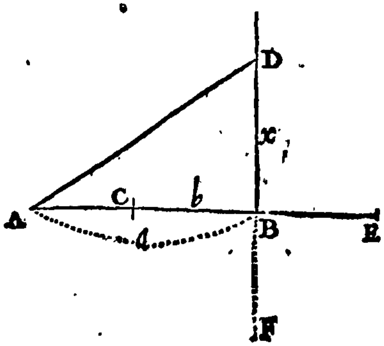
Inventâ igitur tum Conſtructione tum Compoſitione ſive Demonſtratione, poterit Problema, neglecto jam artificio, quo utraque fuit inveſtigata, in hunc modum conſtrui atque componi.

Conſtructio.

Productâ A B ad E, ut B E ſit æqualis B C: fiat ut C E ad A E, ita A C ad B D, jungaturque A D. Dico hanc ipſis D B, B C ſimul ſumptis æqualem eſſe.

Demonſtratio.

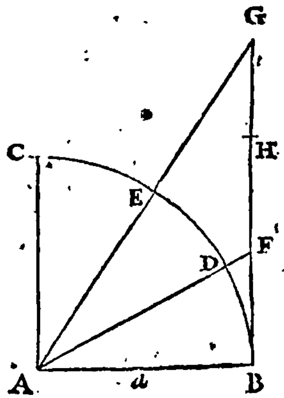
Etenim productâ D B ad F, ita ut B F ſit æqualis B C, quoniam per conſtructionem C E eſt ad A E, ſicut A C ad B D: erit [f] rectangulum ſub extremis C E, B D, id eſt, duplum rectangulum F B D, æquale rectangulo ſub mediis E A, A C. Quibus ſi addatur commune quadratum ex F B vel B C, erit etiam quadratum F B unà cum duplo rectangulo F B D æquale quadrato ex A B [g]. Quibus ſi rurſus addatur commune quadratum ex B D: erunt quoque bina quadrata ex F B, B D ſimul cum duplo rectangulo F B D, id eſt [h], quadratum totius F D, æqualia binis quadratis ex A B, B D, id eſt [i], æquale quadrato ex A D. Vnde & ipſæ rectæ F D & A D æquales erunt. Hinc cum F D æqualis ſit ipſis D B, B C ſimul ſumptis, erit etiam A D ipſis D B, B C ſimul ſumptis æqualis. Quod erat faciendum.



f per 16 ſexti.
g per 6 ſecundi.
h per 4 ſecundi.
i per 47 primi.

THEOREMA.

Si in quadrante circuli A B C ſumatur arcus quilibet B D minor quàm 45 gr. cujus duplus ſit B E, eorumque tangentes B F, B G: erit ut quadratum radii A B minus quadrato B F ad duplum quadrati A B, ita B F ad B G.



Series *Analyſeos*.

Eſto A B ∞ a
B F ∞ x
B G ∞ y, eritque F G ∞ $y - x$
& A G ∞ z.

Quoniam itaque arcus B E ipſius B D duplus ponitur, ac proinde angulus B A G duplus anguli B A F: erit angulus ad A in triangulo A B G rectâ A F biſariam ſectus.

Vnde [a] erit

a per 3 ſexti.

ut F G ad B F, ita A G ad A B
$y - x$ — x — z / a.

Ideoque [b] □ B F, A G æquale □[lo] F G, A B

b per 16 ſexti.

div. utrinque per x $\quad xz \infty ay - ax.$
fit $z \infty \frac{ay - ax}{x}$

Hinc ductâ utrâque parte in ſe quadratè,

add. { □ A B. aa / □ B G. yy } □ A G, per 47 primi.

erit $zz \infty \frac{aayy - 2aaxy + aaxx}{xx} \infty aa + yy \infty zz.$

mult. utrinque per xx $\quad aayy - 2aaxy + aaxx \infty aaxx + xxyy$
toll. utrinque $aaxx$ $\quad aayy - 2aaxy \infty xxyy$
div. utrinque per y $\quad aay - 2aax \infty xxy$
add. utrinque $2aax$ $\quad aay \infty 2aax + xxy$
toll. utrinque xxy $\quad aay - xxy \infty 2aax$
div. utrinque per $aa - xx$
fit $y \infty \frac{2aax}{aa - xx}$.

□AB—□BF 2□AB BF BG
Hoc eſt, erit ut $aa - xx$ ad $2aa$, ita x ad y. Vt proponebatur.

De-

Demonſtrationis ſeries eodem modo ſe habet quo Analyſeos, cum utriuſque veſtigia conſentiant, quibus ab hypotheſi ad quæſiti concluſionem perducimur. Vti hîc videre eſt.

Etenim cum [c] ſit — *c per 3 ſexti.*
ut F G ad B F, ita A G ad A B:
$y - x$ —— x —— z / a
erit quoque [d] — *d per 16 ſexti.*
ut □ F G ad □ B F, ita □ A G ſeu □ A B + □ B G ad □ A B
$yy - 2xy + xx$ —— xx —— zz, id eſt, $aa + yy$ / aa.
& dividendo [e] — *e per 17 quinti.*
ut □ F G — □ B F vel F H,
id eſt, ▭ B G H [f] ad □ B F, ita □ B G ad □ A B — *f per 6 ſecundi.*
$yy - 2xy$ —— xx —— yy / aa.
permutandoque [g] — *g per 16 quinti.*
ut ▭ B G H ad □ B G, vel [h] ut H G ad G B, ita □ B F ad □ A B — *h per 1 ſexti.*
$y - 2x$ —— y —— xx / aa.
Id eſt, invertendo & per converſionem rationis [i], — *i per Cor. 4 quinti, & per Cor. 19 quinti.*
ut □ A B ad □ A B — □ B F, ita G B ad B H
aa —— $aa - xx$ —— y / $2x$.
& duplatis antecedentibus [k] convertendoque — *k vide Clavium ad 22 quinti.*
ut □ A B — □ B F ad 2 □ A B, ita B H ad 2 G B ſeu B F ad B G [l]
$aa - xx$ —— $2aa$ —————— x / y.
Quod erat oſtendendum. — *l per 15 quinti.*

Quòd ſi autem Algebræ ignaris ſive in inveniendi arte imperitis ipſa demonſtratio ſit exhibenda, poterit ea prætermiſſis jam hiſce veſtigiis ſic adhiberi.

Sumatur F H æqualis F B. Cum igitur in triangulo A B G angulus ad A rectâ A F bifariam ſectus ſit, erit [m] ut F G ad B F, ita A G ad A B. Sed cum linearum proportionalium etiam proportionalia ſint quadrata, erit & [n] ut quadratum F G ad quadratum B F, ita quadratum A G, id eſt, *per 47 primi*, ſumma quadratorum A B, B G, ad quadratum A B. Et dividendo [o] ut quadratum F G minus quadrato B F vel F H, id eſt [p] rectangulum B G H, ad quadratum B F, ita quadratum B G ad quadratum A B; permutandoque [q] ut rectangulum B G H ad quadratum B G ſeu [r] ut H G ad G B, ita quadratum B F ad quadratum A B. Hoc eſt, in-

m per 3 ſexti. *n per 22 ſexti.* *o per 17 quinti.* *p per 6 ſecundi.* *q per 16 quinti.* *r per 1 ſexti.*

invertendo & per converſionem rationis[s], ut quadratum A B ad quadratum A B minus quadrato B F, ita G B ad B H; & duplatis antecedentibus[t] convertendoque, ut quadratum A B minus quadrato B F ad duplum quadrati A B, ita B H ad duplum ipſius G B ſeu[u] B F ad B G. Quod erat demonſtrandum.

s per Cor. 4 quinti, & per Cor. 19 quinti.
t vide Clavium ad 22 quinti.
u per 15 quinti.

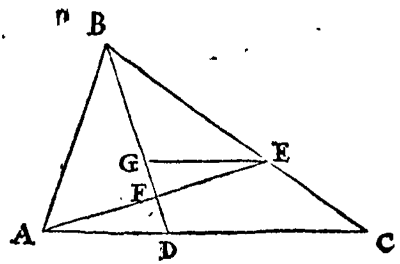
Hinc

"Si, *Tangens cujuſlibet arcûs minoris quàm 45 gr. ducatur in duplum Quadratum Radii; à Quadrato Radii auferatur Tangentis quadratum; Illud productum dividatur per hoc reſiduum: Quotus erit Tangens arcûs dupli.*

Theorema hoc à Clariſſimo viro D. Ioanne Pellio excogitatum atque ingenioſè adhibitum pluribus modis demonſtratum repetitur in tractatu ejus de controverſiis, circa veram circuli menſuram, inter ipſum & Clar. virum D. Chriſtianum Severini Longomontanum ortis, ac anno 1647 in lucem editis.

THEOREMA.

Si fuerit triangulum A B C, cujus angulus ad B rectâ B D biſariam ſit diviſus, & ex B C abſcindatur B E æqualis A B, jungaturque A E, ſecans B D in F: dico, ſi agatur E G parallela A C, occurrens ipſi B D in G, eſſe ut B G ad B D, ita A D ad D C, & A B ad B C; nec non D C bis eſſe ad exceſſum; quo D C ſuperat A D, ſicut B D ad D F:



Series *Analyſeos.*

Eſto B D ∞ *b*
A D ∞ *c*
D C ∞ *y*
& D F ∞ *z*.

Quoniam itaque triangulorum A B F, E B F anguli ad B ex hypotheſi ſunt æquales, nec non latera A B, B F & E B, B F, quæ ipſos comprehendunt, æqualia: erunt &[a] anguli ad F æquales, id eſt recti, baſiſ-

a per 4 primi.

baſisque A F baſi F E æqualis. Porrò cum [b] propter parallelas A C, G E anguli D A F, F E G in triangulis A F D, F G E æquales ſint, ut & [c] anguli ad verticem A F D & G F E, latusque A F lateri F E, ut oſtenſum eſt: erunt quoque [d] reliqua latera A D, D F reliquis lateribus E G, G F æqualia. Hinc cum [e] propter ſimilitudinem triangulorum B G E, B D C, B G ſit ad G E, id eſt, A D, ſicut B D ad D C; nec non B G ad B E, id eſt A B ſicut B D ad B C: erit quoque [f] permutando B G ad B D, ſicut A D ad D C, & A B ad B C. Quod eſt primum.

b per 29 primi.
c per 15 primi.
d per 26 primi.
e per Cor. 4 quinti.
f per 16 quinti.

Cæterum D C bis eſſe ad exceſſum, quo D C ſuperat A D, ſicut B D ad D F: ita patet.

Eſt enim, ut B G ad B D, ita A D ad D C

$b - 2z \text{ —— } b \text{ —— } c \;/\; y.$

Ideoque [g] ▭ B G, D C ∞ ▭^lo B D, A D.

g per 16 ſexti.

$by - 2yz \infty bc.$

add. utrinque $2yz$ — $by \infty 2yz + bc$

toll. utrinque bc — $by - bc \infty 2yz$

div. utrinque per $2y$ — fit $\frac{by - bc}{2y} \infty z$. Hoc eſt, erit ut

2 D C D C—A D B D D F

$2y$ ad $y - c$, ita b ad z. Quod eſt ſecundum.

Vel etiam, hoc modo:

Etenim cum ſit

ut B G ad B D, ita A D ad D C

$b - 2z \text{ —— } b \text{ —— } c \;/\; y.$

erit invertendo [h]

ut D C ad A D, ita B D ad B G

$y \text{ —— } c \text{ —— } b \;/\; b - 2z.$

h per Cor. 4 quinti.

& per converſionem rationis [i]

ut D C ad D C — A D, ita B D ad D G

$y \text{ —— } y - c \text{ —— } b \;/\; 2z.$

i per Cor. 19 quinti.

id eſt, duplatis antecedentibus, [k]

ut 2 D C ad D C—A D, ita 2 B D ad D G ſeu B D ad D F

$2y \text{ —— } y - c \text{ —— } b \;/\; z.$

k vide Clavium ad 22 quinti.

Ex his facile eſt, cognitis A D, D B, & D C, invenire D F.

Si enim, exempli gratiâ, A D ſit 39, D B 45, & D C 325: fiat ut 2 D C 650 ad D C — A D 286, ita D B 45, ad D F $19\frac{4}{5}$.

THEOREMA.

Iiſdem poſitis, dico rectangulum A D C unà cum quadrato D B æquale eſſe rectangulo A B C.

Series *Analyſeos*.

Eſto A B $\infty\ a$
B D $\infty\ b$
A D $\infty\ c$
B C $\infty\ x$
D C $\infty\ y$
& D F $\infty\ z$.

*per 13 ſecundi.

Etenim cum* 2 ▭ B D F ſit ∞ □ A D + □ D B — □ A B, id eſt, $2bz \ \infty \ cc + bb - aa$:

erit, dividendo utrinque per 2 b, $z \ \infty \ \frac{cc + bb - aa}{2b}$.

Vnde cum per antec. Theorema inventum quoq; ſit $\frac{by - bc}{2y} \ \infty \ z$:

erit $\frac{cc + bb - aa}{b} \ \infty \ \frac{by - bc}{y}$

diviſo utroque denominatore per 2, inſtituatur multiplicatio per crucem

$ccy + bby - aay \ \infty \ bby - bbc$

add. utrinque aay

$ccy + bby \ \infty \ aay + bby - bbc$

toll. utrinque bby

$ccy \ \infty \ aay - bbc$

add. utrinque bbc

$ccy + bbc \ \infty \ aay$

loco ay ſubſtit. cx

$ccy + bbc \ \infty \ acx$.

div. utrinque per c

▭ADC + □DB ▭ABC.

Et ſit $cy + bb \ \infty \ ax$. Quod erat propoſitum.

Ex demonſtratis in antec. Theoremate vel 3ⁱⁱᵃ Sexti [illegible] ut A D ad D C, ita A B ad B C
c — y — a / x.
ac proinde *per 16 ſexti*
▭AD, BC ∞ ▭AB, DC
$cx \ \infty \ ay$.

Quo autem pacto in adæquatione hac reſolvenda argumentandum ſit, ut ſequendo veſtigia allatæ reductionis, quæ ob ſuperiorem multiplicationem per crucem propriè Algebraïca eſt,

quæ-

quæſitum Theorematis Geometricè concludatur, ſequens terminorum diſpoſitio docebit.

Ex præcedenti Theoremate eſt
ut 2 D C ad D C — A D; ita B D ad D F
$2y$ —— $y-c$ —— b / z.
ac proinde[b] 2 ▭ C D F æqual. ▭ B D C — ▭ A D B
$2yz$ ∞ $by-bc$.
Deinde[c] eſt, ut B D ad D C, ita 2 ▭ B D F ad 2 ▭ C D F. aſ-
b —— y —— $2bz$ / $2yz$.
ſumptâ ſc. com. alt. 2 D F, id eſt, $2z$.

Hinc cum[d]
2 ▭ B D F æqu. □ A D + □ D B — □ A B, & 2 ▭ C D F æqu. ▭ B D C — ▭ A D B:
$2bz$ ∞ $cc+bb-aa$, & $2yz$ ∞ $by-bc$:
erit ut B D ad D C, ſeu[e] □ B D ad ▭ B D C,
bb —— by
ita □ A D + □ D B — □ A B ad ▭ B D C — ▭ A D B.
$cc+bb-aa$ —— $by-bc$
ideoque[f]
& reliq. □ A B — □ A D ad rel. ▭ A D B, ut totum ad totum ſeu B D ad D C.
$aa-cc$ —— bc —— b / y.

Facile hîc eſſet quæſitum Propoſitionis concludere, revocando hanc proportionem ad æqualitatem, & deinde in locum ay ſubſtituendo cx. Sed quoniam ſic ad ſolida aſcenditur, de quibus in poſterioribus Elementorum libris agitur, qui ob difficultatem ſuam magis præteriri quàm pro Elementis Geometriæ addiſci ſolent, poterimus iiſdem ſepoſitis in quæſiti concluſionem ſic ulteriùs argumentari.

Sed ut B D eſt ad D C, ita quoque eſt[g] ▭ A D B ad ▭ A D C;
b —— y —— bc / cy;
& ut B D ad A D, ita quoque eſt[h] ▭ A D B ad □ A D; &[i],
b —— c —— bc / cc.
□ B D ad ▭ A D B ſeu bb ad bc.

[b] per 16 ſexti.
[c] per 1 ſexti.
[d] per 13 ſecundi.
[e] aſſumptâ com. altit. B D, id eſt, b.
[f] per 19 quinti.
[g] aſſumptâ com. altit. A D ſeu c.
[h] aſſumptâ com. altit. A D ſeu c.
[i] aſſumptâ com. altit. B D ſeu b

 Erunt

Erunt itaque □AB--□AD, ▭ADB, & □AD tres magnitudines
$aa - cc \quad bc \quad cc$ ab una parte;
& □BD, ▭ADB, & ▭ADC tres aliæ ab altera
$bb \quad bc \quad cy$ parte, quæ binæ ſumptæ in eadem ſunt ratione, quarumque proportio eſt perturbata:

k per 23 quinti.

quare etiam ex æqualitate[k] proportionales erunt, id eſt, □AB—□AD ad □AD, ſicut □BD ad ▭ADC.
$aa - cc \quad cc \quad bb \;/\; cy.$

l per 18 quinti.

Et componendo[l].
□AB ad □AD, ſicut □BD + ▭ADC ad ▭ADC
$aa \quad cc \quad bb + cy \;/\; cy.$

m per 16 quinti.

Permutandoque[m]
□AB ad □BD + ▭ADC, ſicut □AD ad ▭ADC ſeu
$aa \quad bb + cy \quad cc \;/\; cy.$
AD ad DC, id eſt, c ad y.[n]

n per 1 ſexti. relictâ ſc. com. altit. AD ſeu *c*.

Sed ut AD ad DC, ita[o] eſt quoque AB ad BC, ſeu[p], □AB
$c \quad y \quad a \;/\; x.$
ad ▭ABC, id eſt, aa ad ax.

o per antec. Theorema vel 3 ſexti.

p aſſumptâ com. altit. AB ſeu *a*.

Vnde erit ut □AB ad □BD + ▭ADC, ita □AB ad ▭ABC.
$aa \quad bb + cy \quad aa \;/\; ax.$

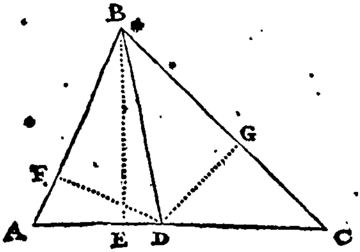
q per 9 quinti.

Æqualia igitur ſunt[q] □BD + ▭ADC & ▭ABC.
$bb + cy \propto ax.$ Quod erat oſtendendum.

Idem quoque aliter à nobis demonſtratum reperitur Prop^ne 20ma ſecundæ partis prioris tractatus Exercitationum noſtrarum Mathematicarum; ac præterea etiam adhuc aliter ab aliis.

Alia

Alia præcedentis Theorematis Analyſis, ſupponendo tantùm 26 & 47 Propoſitiones primi libri Euclidis.



Demiſſis ex D ſuper AB, BC, perpendicularibus DF, DG, patet, ob angulum ABC rectâ BD biſariam diviſum, ipſas DF & DG, ut & FB & BG *per 16. primi* eſſe æquales. Deinde eſto etiam BE perpendicularis ad AC, ſitque

AB $\infty\ a$
BD $\infty\ b$
AD $\infty\ c$
BC $\infty\ x$
DC $\infty\ y$

FB vel BG $\infty\ t$, eritque AF $\infty\ a - t$,
& GC $\infty\ x - t$.
& ED $\infty\ v$, eritque AE $\infty\ c - v$,
& EC $\infty\ y + v$.

per 47 primi.

Subtr. $\{ \square AD.\ cc$; $\square AF.\ aa - 2at + tt$ — Subtr. $\{ bb.\ \square BD$; $tt.\ \square FB$

$\square FD.\ cc - aa + 2at - tt\ \infty\ bb - tt.\ \square FD$

dele utrinque tt, & transfer cc & aa

$2 \square ABF\quad \square AB + \square BD - \square AD$
$2at\ \infty\ aa + bb - cc$ *

div. utrinque per $2a$

fit $t\ \infty\ \frac{aa + bb - cc}{2a}$.

Sed t in aliis quoque terminis inveniri poteſt, quærendo eam per 3 latera trianguli DBC, hoc pacto:

per 47 primi.

Subtr. $\begin{cases} \square DC.\ yy \\ \square GC.\ xx - 2xt + tt \end{cases}$ Subtr. $\begin{cases} bb.\ \square BD \\ tt.\ \square BG \end{cases}$

$\square DG.\ yy - xx + 2xt - tt \infty bb - tt.\ \square DG$

del. utrinque tt, & transf. yy & xx

$2 \square CBG \quad \square BC + \square BD - \square DC$

$2xt \infty xx + bb - yy$ *

div. utrinque per $2x$

fit $t \infty \frac{xx + bb - yy}{2x}$.

Sive igitur quæratur t per 3ª latera △li ABD, ſive per 3ª latera △li DBC, elucet utique inde * Propoſitio 13 ſecundi libri Euclidis, ac præterea quomodo hæc ipſa adhibenda ſit ad FB vel BG inveniendam.

Erit itaque

$\frac{aa + bb - cc}{a} \infty \frac{xx + bb - yy}{x}$

diviſo utroque denominatore per 2, inſtituatur multiplicatio per crucem

$aax + bbx - ccx \infty axx + abb - ayy$

transf. quantitates, ut, quæ in bb ductæ ſunt ab una parte habeantur

$bbx - abb \infty axx - ayy + ccx - aax$

div. utrinque per $x - a$

eritque $bb \infty \frac{axx - ayy + ccx - aax}{x - a}$.

Quæratur jam v per 3ª latera trianguli ABD

per 47 primi.

Subtr. $\begin{cases} \square AB.\ aa \\ \square AE.\ cc - 2cv + vv \end{cases}$ Subtr. $\begin{cases} bb.\ \square BD \\ vv.\ \square ED \end{cases}$

$\square EB.\ aa - cc + 2cv - vv \infty bb - vv.\ \square EB$

del. utrinque vv, & transf. aa & cc

$2cv \infty bb + cc - aa$.

div. utrinque per $2c$

fit $v \infty \frac{bb + cc - aa}{2c}$.

Sed v quoque in aliis terminis inveniri poteſt, quærendo eam per 3ª latera trianguli DBC, hoc pacto:

Subtr.

per 47 primi

Subtr. $\left\{ \begin{array}{l} \square BD.bb \\ \square ED.vv \end{array} \right.$ Subtr. $\left\{ \begin{array}{r} xx.\square BC \\ yy+2yv+vv.\square EC \end{array} \right.$

$\square EB.\ bb-vv \infty xx-yy-2yv-vv.\square EB$

del. utrinque vv, & transf. bb & $2yv$ — $2\,\square CDE \quad \square BC - \square DC - \square BD$

$2yv \infty xx-yy-bb$ †

div. utrinque per $2y$ — fit $v \infty \frac{xx-yy-bb}{2y}$

Quærendo itaque v per 3^a latera $\triangle^{li}$ D B C, emanat hinc Prop. 12 ſecundi libri Euclidis, ac præterea quomodo hæc ipſa debeat adhiberi ut inveniatur E D.

Quare erit

$$\frac{bb+cc-aa}{c} \infty \frac{xx-yy-bb}{y}$$

diviſo utroque denominatore per 2, inſtituatur multiplicatio per crucem

$$bby+ccy-aay \infty cxx-cyy-cbb$$

transf. quantitates, ut, quæ in bb ductæ ſunt, ab una parte habeantur

$$bby+cbb \infty cxx+aay-cyy-ccy$$

div. utrinque per $y+c$

& fit $bb \infty \frac{cxx+aay-cyy-ccy}{y+c}$

Dupliciter igitur invento bb, habebitur æquatio

inter $\frac{axx-ayy+ccx-aax}{x-a}$ & $\frac{cxx+aay-cyy-ccy}{y+c}$.

mult. per crucem

$$axxy-ay^3+ccxy-aaxy+acxx-acyy+c^3x-aacx$$
$$\infty$$
$$cx^3+aaxy-cxyy-ccxy-acxx-a^3y+acyy+accy$$

tranſpoſitis tranſponendis, fit

$$2acxx+cxyy+c^3x-cx^3-aacx+2ccxy$$
$$\infty$$
$$2aaxy+ay^3+accy-axxy-a^3y+2acyy$$

div. utrinque per $2ax+yy+cc-xx-aa+2cy$.

AD DC AB BC

eritque $cx \infty ay$. Hoc eſt, erit ut c ad y, ita a ad x. Quæ tertia eſt Propoſitio libri ſexti Euclidis.

ac proinde $x \infty \frac{ay}{c}$, & $\frac{cx}{a} \infty y$.

Hinc

Hinc exiſtente $bb \propto \frac{axx - ayy + ccx - aax}{x - a}$, ſi in locum ay ſubſtituatur cx & vice verſâ; habebitur $bb \propto \frac{axx - cxy + cay - aax}{x - a}$,
□ADC+□DB □ABC
id eſt, $bb \propto ax - cy$; ſeu, quod eodem recidit, $cy + bb \propto ax$. Omnino ut in antecedenti Theoremate. Unde facile eſt, cognitis AB, BC, AD, & DC, invenire BD.

Quòd ſi autem, exiſtente $bb \propto ax - cy$, pro x ſcribatur $\frac{ay}{c}$ fiet $bb \propto \frac{aay}{c} - cy$ vel $bbc \propto aay - ccy$. id eſt, dividendo utrinque per $aa - cc$, erit $\frac{bbc}{aa - cc} \propto y$. Vel, reſolvendo æqua-
□AB—□AD □BD AD DC
litatem in proportionem, erit ut $aa - cc$ ad bb, ita c ad y. Similiter, ſi pro y ſcribatur $\frac{cx}{a}$, erit $bb \propto ax - \frac{ccx}{a}$ vel $bba \propto aax - ccx$, id eſt, dividendo utrinque per $aa - cc$, erit $\frac{bba}{aa - cc} \propto x$. Vel,
□AB—□AD
reſolvendo æqualitatem in proportionem, erit ut $aa - cc$ ad
□BD AB BC
bb, ita a ad x. Quæ quidem inſuper oſtendunt, quo pacto ex tribus lateribus △li ABD inveniri poſſint BC & DC.

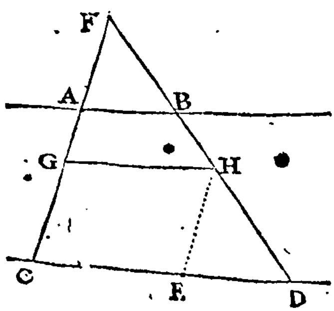
Atque ita conſtat, ſi ad præcedentis Theorematis inveſtigationem duntaxat adhibeantur 26 & 47 Propoſitiones primi libri Euclidis, quâ ratione ex calculo non modò idem Theorema emanet, verùm etiam Propoſitio 12 & 13 ſecundi libri, 3tia ſexti, aliæque propoſitiones, in Euclide non extantes, quæ triangulum concernunt, cujus angulus bifariam eſt diviſus.

Cæterùm calculum hunc multò prolixiorem eſſe calculo antecedentis Theorematis nemini (ut opinor) mirum videri debet, cum ad illud indagandum ſuppoſuerimus Theorema, quod ei immediatè præcedit, tum etiam Prop. 12 aut 13 ſecundi: ſiquidem rationes, quæ in iis comprobandis cunctæ ac ſingulæ ſunt perpendendæ, illis, ſic jam præſuppoſitis omnino prætermittuntur; quæ alioquin, ſi rem

rem ipſam penitiùs inſpicere atque à primis velut principiis, (quemadmodum in Algebra præſertim fieri ſolet,) deducere velimus, longâ ſerie forent ſpectandæ. Quæ quidem hîc refero, ut quilibet intelligat, nonnullos reperiri, etiam in Mathematicis haud leviter verſatos, qui videntes hujuſmodi calculum ſæpenumero valde prolixum evadere, plurimiſve terminis conſtantem, demonſtrationes Geometricas ei longè præferunt, non animadvertentes ejuſdem beneficio elici Theoremata, quibus ad id concatenatim utuntur. Exiſtimantes præterea Algebram vel hoc nomine non magni faciendam eſſe, quòd ſolummodo circa æquationes verſetur ac eaſdem continuè reſpiciat, quod ſanè ego maximi momenti judicaverim, quippe harum ope infinita genera Problematum pro uno genere Problematum haberi queunt, ac demum quicquid in univerſa Matheſi arduum ſeu difficile occurrit, id omne per æquationem abſque ulla ambage & verborum involucris quàm ſimpliciſſime poteſt explicari.

PROBLEMA.

Datis poſitione duabus rectis lineis parallelis AB, CD, & in iis duobus punctis A & E: è puncto F extra ipſas dato rectam lineam ducere FBD, quæ à poſitione datis abſcindat rectas AB, ED, datam inter ſe rationem habentes AF ad CG, ſeu *a* ad *d*.



Series *Reſolutionis*.

Ponatur factum, quod quæritur, hoc eſt, ſit AB ad ED, ut *a* ad *d*, ſitque AF ∞ *a*
CF ∞ *b*
CE ∞ *c*
& AB ∞ *x*.

Hinc ut A F ad C G, ita AB ad 4^tam ſeu E D

a —— d —— x / $\frac{dx}{a}$

Sed ex ſimilitudine △^lorum A F B & C F D eſt quoque

ut A F ad A B, ita C F $\overline{\text{add. CE. } c}$

a —— x —— b / ad C D. $c + \frac{dx}{a}$

Quare erit *per 16 ſexti* ▭ A F, C D ▭ A B, C F

$ac + dx \;\infty\; bx.$

Transferatur dx ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab unâ parte habeantur

eritque $ac \;\infty\; bx - dx.$

Dividatur jam utraque pars per $b - d$

& fit $x \;\infty\; \frac{ac}{b - d}$. Hoc eſt, reſolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $b - d$ ad c, ita a ad x.

Id quod arguit, ad Problema hoc ſolvendum, ſtatuendum eſſe ut G F ad C E, ita A F ad A B. Vt autem ipſum componatur, repetantur Reſolutionis veſtigia & ab ejus fine per eadem redeatur ad id unde initium cepit. Quemadmodum ſuperiùs jam ſæpiùs monſtratum fuit, atque etiam hîc videre eſt, præmittendo priùs Conſtructionem, quæ ſic ſe habet.

Conſtructio.

Ductâ G H parallelâ A B vel C D ac æquali C E, agatur ex F per H recta F H D, ſecans A B, C D in B. & D: dico A B ad E D eſſe, ſicut A F ad C G, ſeu a ad d.

Finis *Compoſitionis.*

A F C G A B E D.

Vnde *per 16 ſexti* erit, ut a ad d, ita x ad f.

▭ A F, E D ▭ C G, A B

erit ſimiliter $af \;\infty\; dx.$

▭ A F, C E

Hinc dempto utrinque communi ac,

Quare

▭AF,CE+▭AF,ED ▭AF,CE+▭CG,AB.

Quare erit etiam $a c + a f \;\infty\; a c + d x$..

▭CF, AB ▭AF,CE+▭CG,AB.

Erat autem & $b x \;\infty\; a c + d x$.

▭CF,AB ▭AF,CD,ſeu,▭AF,CE+▭AF,ED.

Quare *per 16 ſexti* erit $b x \;\infty\; a c + a f$.

AF AB CF CD

eritque ex ſimilitudine △lorum AFB, & CFD, ut a ad x, ita b ad $c+f$.

Eſto jam ED $\infty\; f$,

▭CF,AB ▭AF,CE+▭CG,AB.

eritque $b x \;\infty\; a c + d x$..

▭CG,AB

Addatur utrinque $d x$,

▭GF,AB ſeu ▭CF,AB—▭CG,AB ▭AF,CE.

erit *per 16 ſexti* $b x - d x \;\infty\; a c$

id eſt, reductâ proportione ad æqualitatem,

GF GH vel CE AF AB

Ex conſtructione eſt, ut $b - d$ ad c, ita a ad x:

Principium *Compoſitionis*.

Relictis igitur hiſce veſtigiis demonſtratio eiſdem ſuperſtructa erit talis.

Demonſtratio.

Quoniam itaque ex conſtructione GF eſt ad GH vel CE, ſicut AF ad AB: erit [a] rectangulum ſub extremis GF, AB æquale rectangulo ſub mediis AF, CE. Quibus ſi addatur commune rectangulum ſub CG, AB, erit [b] rectangulum ſub tota CF & AB æquale duobus rectangulis ſub AF, CE & ſub CG, AB. Porrò, quoniam ex ſimilitudine triangulorum AFB & CFD, AF eſt ad AB, ſicut GF ad CD: erit [c] rectangulum ſub mediis CF, AB æquale rectangulo ſub extremis, AF, CD. hoc eſt, [d] æquale duobus rectangulis ſub AF, CE & ſub AF, ED. Erat autem quoque rectangulum ſub CF, AB æquale duo-

a per 16 ſexti.
b per 1 ſecundi.
c per 16 ſexti.
d per 1 ſecundi.

bus rectangulis ſub A F, C E & ſub C G, A B. Æqualia igitur erunt bina rectangula ſub A F, C E & ſub A F, E D binis rectangulis ſub A F, C E & ſub C G, A B. A quibus ſi commune auferatur rectangulum ſub A F, C E, erit etiam reliquum rectangulum ſub A F, E D æquale reliquo rectangulo ſub C G, A B. Vnde [e] ut A F ad C G, ita A B ad E D. Quod erat faciendum.

e per 16 ſexti.

Hactenus quæ præceſſerunt Problemata & Theoremata iſtius naturæ cenſeri poſſunt, quorum difficultas in demonſtrationibus ex calculi veſtigiis eliciendis potiùs quàm in iiſdem per Algebram ſolvendis & oſtendendis conſiſtere judicari debet. Etenim cum in Algebra Problemate aut Theoremate ad Æquationem perducto hæc ſecundùm certas regulas reducatur reſolvaturque, at verò demonſtratio Geometrica, quæ ex eorum calculo depromenda eſt, non ſemper eiſdem legibus ſit obnoxia, ſed diverſimodè prout requiritur, immutanda veniat, ut ipſa commodè feliciterque per Geometriæ Elementa explicetur: viſum nobis fuit hîc conſequenter illius contrarium in adductis aliquot exemplis patefacere, utpote in quibus præcipua difficultas in ipſorum per Algebram enodatione ſita eſſe appareat. In quem finem duas primùm Quæſtiones Arithmeticas in medium afferam, ut, ipſis beneficio calculi hujus Geometriæ ſolutis, cuique fiat manifeſtum, quo pacto illius ignari deinde ad eaſdem ſolvendas ratiocinari poſſint, vulgaribus tantùm Arithmetices regulis inſtructi. Quibus aliquot Quæſtiones Geometricas ejuſdem generis ſubjuncturus ſum, quò ſimul conſtet plurimas etiam tales reperiri, poſt quarum ſolutionem Algebraïcam ultrò velut ſeſe offert ſolutio ipſarum Geometrica, ita, ut quod illius demonſtrationem inſuper concernit Geometriæ Elementa jam edoctos non effugiat.

Qvæstio.

Quæſtio 44 primæ partis libri primi Exercita.

OEnopola duplex habet vinum, unius 8 ſtufris, alterius 14 ſtufris conſtat cantharus. Vult autem mixtionem face-

facere, ita ut dolium vini vendere poſſit 35 florenis. Quæritur, quot cantharos utriuſque ad hanc mixtionem faciendam ſumere debeat?

tionem noſtrarum Mathematicarum.

Ponatur eum debere ſumere x cantharos primi 8 ſtufr. ſeu a,
& y cantharos ſecundi 14 ſtufr. ſeu b.

Deinde ſupponendo dolium continere 80 cantharos ſeu c, & pretium 35 flor. vel 700 ſtufrorum, quo ipſum vendi debet, vocari d: erit $x + y \infty c$
& $x \infty c - y$.

Quæratur jam quanti conſtent canthari utriuſque vini, quo dolium impleri debet: dicendo

Canth. *conſtat* ſtufr., *quanti conſtabunt* Canth. ſtufr.
1 — a — x / facit ax. conſtant canthari primi vini, in dolium infundendi

Canth. *conſtat* ſtufr., *quanti conſtabunt* Canth. ſtufr.
1 — b — y / facit by. conſtant canthari ſecundi vini, in dolium infundendi

ſtufr.

eritque ſumma $ax + by \infty d$.

transf. by in alt. part. $ax \infty d - by$

divid. utrinque per a fit $x \infty \frac{d - by}{a}$.

Erat autem & $x \infty c - y$.

Quare erit $c - y \infty \frac{d - by}{a}$

mult. utrinque per a $ac - ay \infty d - by$

transf. quantitates, ut quæ in y ductæ ſunt unam teneant æquationis partem $by - ay \infty d - ac$

div. utrinque per $b - a$ & fit $y \infty \frac{d - ac}{b - a}$ vel $\frac{1d - 1ac}{b - a}$. Id eſt; erit ut $b - a$ ad 1, ita $d - ac$ ad y.

 Quæ-

Quæſtione hâc ita reſolutâ, ut conſtet, quo pacto in quæſiti inventionem circa hæc facienda ratiocinari liceat, inſpiciatur ſequens illorum interpretatio.

Mult. $c.$ 80 Canth. ſeu, dolium
per $a.$ 8 ſtufr.
fiunt $ac.$ 640 ſtufr.
conſtat dolium plenum vino 8 ſtufrorum.

Subtr.
Ex $d.$ 700 ſtufr. conſtat dolium plenum vino 8 & 14 ſtufrorum
$ac.$ 640 ſtufr.
Relinq. $d—ac.$ 60 ſtufri, quibus dolium plus cônſtat impletum vino 8 ſtufr. & 14 ſtufrorum, quàm plenum ſolo vino 8 ſtufrorum: vel etiam, quibus canthari 14 ſtufrorum in dolio contenti cariores ſunt cantharis 8 ſtufrorum, illorum loco ſumptis.

ſtufr.
Ex $b.$ 14
ſubtr. $a.$ 8
$b—a.$ 6 ſtufr. differentia pretii unius canthari — 1 — Canth. $d—ac.$ 60 ſtufr. differentia pretii cantharorum in dolio / facit $\frac{1d—1ac}{b—a}$ ſeu 10 canth. 14 ſtufrorum ∞ y

ſubtr.
$c.$ 80 Canth. dolii
rel. $c—y.$ 70 canth. 8 ſtufrorum ∞ x.

Qvæstio.

Quæſtio 46 primæ partis libri primi Exercitationum noſtrarum Mathematicarum.

Ancilla forum petit, habens $9\frac{1}{2}$ ſtufros, ut iis poma & pira emat; ubi veniens, 10 poma ipſi offeruntur 1 ſtufr. & 25 pira 2 ſtufris. Quæritur, ſi utriuſque fructus ſimul 100 habere velit, quot poma & pira ſeorſim accipere debeat?

Ponatur ancillam debere accipere x poma, unde cum utriuſque fructus 100 ſeu a ſimul pro $9\frac{1}{2}$ ſtufr. ſeu b habere velit, ſequitur ipſam recipere debere $a—x$ pira.

Hinc cum 10 poma ſeu c offerantur 1 ſtufro ſeu d, & 25 pira ſeu e ſtufris 2 ſeu f, quæratur quanti jam conſtent aſſumpta x poma, & $a—x$ pira.

Di-

Dicendo:

Poma *conſtant* ſtufr., *quanti conſtabunt* Poma ſtufr.

c —— d —— x / facit $\frac{dx}{c}$. conſtant poma ſumenda

Pira *conſtant* ſtufr., *quanti conſtabunt* Pira

e —— f —— $a-x$ / facit. $\frac{fa-fx}{e}$. conſtant pira ſumenda

ſtufr.

eritque ſumma $\frac{dex+cfa-cfx}{ce} \infty b$.

mult. utrinque per ce — $dex+cfa-cfx \infty cbe$

transf. cfa ad alt. partem — $dex-cfx \infty cbe-cfa$

div. utrinque per $de-cf$ — & fit $x \infty \frac{cbe-cfa}{de-cf}$.

Ad fractionis hujus reſolutionem, fiat ut c ad d, ita e ad quartam, quæ vocetur g: eritque $cg \infty de$. Vnde pro $x \infty \frac{cbe-cfa}{de-cf}$ ſcribi poterit $x \infty \frac{cbe-cfa}{cg-cf}$ vel $\frac{be-fa}{g-f}$. Deinde fiat ut e ad f, ita a ad 4^{tam}, quæ vocetur h: eritque $eh \infty fa$; ita ut pro $x \infty \frac{be-fa}{g-f}$ ſcribi poſſit $x \infty \frac{be-eh}{g-f}$. Hinc ſi demum fiat, ut $g-f$ ad e, ita $b-h$ ad 4^{tam}, erit ea ∞ x, quantitati quæſitæ ſumendorum pomorum.

Quæ itaque ad quæſtionis ſolutionem citra Algebram ſequenti modo argumentandum eſſe inferunt

Poma ſtufr. Poma

c d e g

10 —— 1 —— 25 / facit 2½ ſtufr. conſtant 25 Poma.

ſubtr. f. 2 ſtufr. pretium 25 pirorum.

Relinq. $g-f$. ½ ſtufr. quo 25 poma cariora ſunt 25 piris.

Pira ſtufr. Pira Subtr.

e f a b. 9½ ſtufr. conſtant 100 poma & pira ſimul

25 —— 2 —— 100 / facit h. 8 ſtufr. conſtant 100 pira

relinq. $b-h$. 1½ ſtufri, quibus 100 poma & pira ſimul cariora ſunt 100 piris, vel etiam,

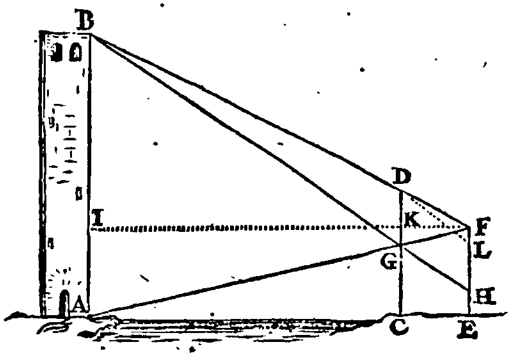
qui-

quibus poma in centenario contenta cariora ſunt piris eorum loco ſumptis.

ſtufr.. differ.	Poma	ſtufr. differ.	Subtr.
g—*f*	*e*	*b*—*h*	*a*. 100
½ ———	25 ———	1½ /	facit *x*. 75 poma
			& *a*—*x*. 25 pira.

Problema.

Metiri altitudinem turris A B, ut & diſtantiam A C, beneficio duorum baculorum C D, E F, datis G D ∞ *a*, C E ∞ *b*, & H F ∞ *c*.



Eſto A C ∞ *x*,
& A B ∞ *y*.

Series *Analyſeos*.

Ductâ I F parallelâ A E, erit propter ſimilitudinem △rum A B F & G D F

ut A B ad I F vel A E, ita G D ad K F vel C E.
y ——— $x+b$ ——— a / b.

Ac proinde per 1 ſexti
$by \infty ax + ab$.

Eodem modo, erit propter ſimilitudinem △rum B D G & B F H
ut B D ad B F, ſive I K ad I F
hoc eſt, A C ad A E, ita G D ad H F.
x ——— $x+b$ ——— a / c.

Adeo-

Adeoque per 16 ſexti

$cx \propto ax + ab.$

Auferatur utrinque ax,

& fit $cx - ax \propto ab.$

Dividatur jam utraque pars per $c - a$,

eritque $x \propto \frac{ab}{c-a}$. Hoc eſt, reſolvendo æqualitatem in proportionem, erit ut $c - a$ ad a, ita b ad x.

Iam cum eidem æqualia inter ſe quoque ſint æqualia erit $by \propto cx$. Hoc eſt, erit ut b ad c, ita x ad y.

Quod ſi autem invenire lubeat y, non inventâ priùs x, ſubrogetur in hujus locum in æquatione ultimò hîc inventâ valor ejus inventus $\frac{ab}{c-a}$,

fietque $by \propto \frac{abc}{c-a}$.

Vbi, ſi utrinque dividatur per b, invenietur $y \propto \frac{ac}{c-a}$. Quæ quidem æqualitas in proportionem ſic reſolvitur, dicendo: ut $c - a$ ad a, ita c ad y. E quibus itaque hujuſmodi Conſtructio ſeu operandi modus eluceſcit.

Sumptâ H L æquali G D, junctaque D K, fiat ut $c - a$ ad a, hoc eſt, ut F L ad L H, ſive F D ad D B, ſive etiam F G ad G A, ita E C ſeu b ad C A ſeu x; & ita quoque F H ſeu c ad A B ſeu y.

Cujus demonſtratio ex 2[da] & 4[ta] ſexti libri Elementorum perſpicua eſt, quippe conſiderando rectam D L ipſi B H parallelam ſecare proportionaliter rectas B F, F H, perinde ac D C, quæ ipſi A B eſt parallela, ſecat rectas A F, A E; ut & rectam F E eidem A B parallelam, facientem △[la] ſimilia G F H & G A B.

Cæterùm ut praxis hujus Problematis cuivis obvia ſit, viſum fuit illud per numeros illuſtrare, ut ſequitur.

digit.

Eſto G D $\propto a \propto 24$

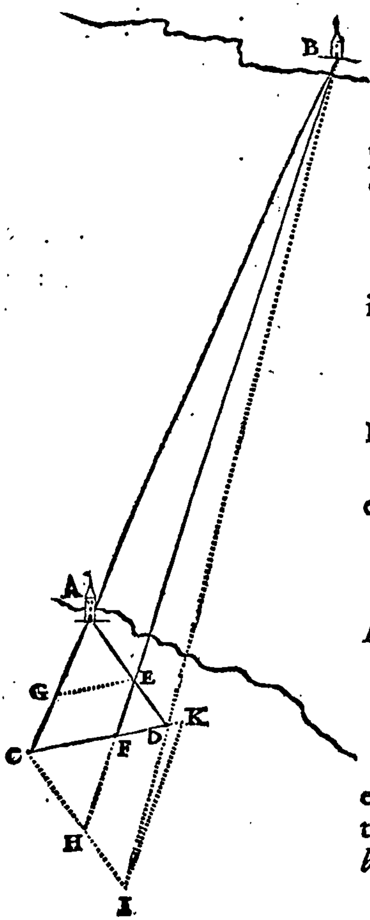
C E $\propto b \propto 30$

& H F $\propto c \propto 25$

Vt F L ad L H
ſeu F D ad D B,
ſive etiam F G ad G A,
1 — 24, ita $\left\{\begin{matrix} E C. 30 \\ F H. 25 \end{matrix}\right\}$ ad $\left\{\begin{matrix} C A. 720. \\ A B. 600. \end{matrix}\right.$ digit.

PROBLEMA.

Metiri diſtantiam turrium A, B, cùm ad A pervenire licet, datis C A ∞ *a*, A D ∞ *b*, C D ∞ *c*, A E ∞ *d*, & C F ∞ *e*.



Eſto A B ∞ *x*.

Series *Analyſeos*.

Ductâ G E parallelâ C D, fiat propter ſimilitudinem △^{rum} ADC & AEG,

ut A D ad D C, ita A E ad E G.

b — c — d / $\frac{cd}{b}$:

itemque

ut A D ad A C, ita A E ad A G.

b — a — d / $\frac{a}{b}$.

Hinc propter ſimilia

△^{la} CBF & GBE

erit ut

CF ad CB, ita GE add. A B. x

e — $a+x-\frac{cd}{b}$ / ad G B. $\frac{ad+bx}{b}$.

Ac proinde per 16 ſexti erit

▭ C F, G B æquale ▭ C B, G E.

$$\frac{ade+bex}{b} \infty \frac{acd+cdx}{b}:$$

Inventâ igitur æquatione, ut evaneſcant fractiones, multiplicetur utrinque per b, & fit $ade+bex \infty acd+cdx$.

Transferantur jam quantitates, ita

ita ut quæ in x ductæ ſunt unam partem æquationis obtineant, reliquæ autem alteram

fietque $bex - cdx \propto acd - ade$.

Denique dividatur utrinque per $be - cd$

eritque $x \propto \frac{acd - ade}{be - cd}$.

Iam ut æqualitas hæc omnium facillimè in proportionem reſolvatur, ſimulque inde eluceat, quo pacto quis ratiocinari teneatur, ut quæſitam lineam A B ſeu x ex datis quàm breviſſimè inveniat: animadvertere oportet, quænam litera plurimùm omnium in hiſce terminis reperiatur. Quæ igitur cum hîc deprehendatur eſſe d, ipſaque ſe ter prodat, ubi reliquæ non niſi bis offenduntur, faciendum eſt, ad deprimendas dimenſiones, ut illa in omnibus terminis inveniatur. In quem finem ſi fiat ut d ad b, ita e ad 4^{tam}, quæ vocetur f: erit $df \propto be$, ac proinde $x \propto \frac{acd - ade}{df - cd}$ ſeu $\frac{ac - ae}{f - c}$. nimirum, abbreviando terminos omnes per d. Vbi ſi demum fiat ut $f - c$ ad $c - e$, ita a ad 4^{tam}: erit ipſa $\propto x$, hoc eſt, $\propto$ quæſitæ lineæ A B. Atque ita apparet longitudinem ejus duabus regulis trium ſeu proportionum inveniri poſſe, quæ aliàs 3^{bus} aut pluribus inveſtiganda foret, ſi nullum in reſolvenda hac fractione fieret diſcrimen.

Vbi notandum, eandem fractionem $\frac{acd - ade}{be - cd}$ etiam alio modo in duas proportionum regulas eſſe reſolubilem, quæ ſingulæ ſicut præcedentes non præter unam dimenſionem agnoſcunt ſive omnino ſimplices exiſtunt. Nimirum conſiderando in duobus terminis reperiri cd, & in ſingulis reliquorum duorum reperiri e; adeò ut, ſi planum cd in aliud tranſmutetur, cujus unum latus ſit e, litera e ſic in omnibus terminis haberi valeat, quæ deinde omitti poſſit. Ac proinde ſi ſtatuatur, ut e ad c, ita d ad 4^{tam}, quæ vocetur g: erit $eg \propto cd$, ita ut pro $\frac{acd - ade}{be - cd}$ ſcribi poſſit $\frac{aeg - ade}{be - eg}$ vel $\frac{ag - ad}{b - g}$. Vnde ſi rurſus fiat ut $b - g$ ad $g - d$, ita a ad 4^{tam}: erit ea $\propto x$, lineæ quæſitæ A B. Quæ quidem animadverſio, cum in abſtracto fiat nullâ factâ calculi relatione ſive reſtrictione ad figuræ lineas, luculenter oſtendit, quàm perperam judicent illi, qui non ritè perſpicientes hujus Geometriæ Metho-

dum conſtructiones concinnas aliunde potiùs quàm ex ejus calculo derivari autumant. Quod utique plurimis exemplis demonſtrare poſſem, iiſque non inelegantibus, ſed cum id prolixiùs explicare non ſit hujus loci, hæc in medium attuliſſe ſuffecerit.

Denique ut pateat, quo pacto præcedentis fractionis reſolutio ad figuræ lineas pertineat eaque ſimul nobis manifeſtet, quales lineæ ducendæ ſint, quæ nos ad quæſiti finem perducant: conſequens fuerit ut ea quæ ad facilitatem reductionis circa calculum ſeorſim ſumus meditati ad figuræ lineas referamus. Conſtructio igitur ſive operandi modus talis eſt.

Fiat ut d ad b, hoc eſt, ut A E ad A D ſive C H ad C I, ita C F ſeu e ad C K ſeu f. Deinde fiat ut $f-c$ ad $c-e$, hoc eſt, ut K D ad D F ſive I D ad D B, ita C A ſeu a ad A B ſeu x.

Cujus demonſtratio ex ipſa proportionalium applicatione manifeſta eſt.

Eâdem manente fractionis reſolutione poſſunt dictæ proportionales diverſis aliis modis figuræ accommodari, indeque velut aliæ conſtructiones concinnari, quibus licèt figuræ valde diſſimiles appareant, operatio tamen una eademque exiſtit. Quas quidem omnes hîc exponere propter earum multitudinem ſupervacuum duximus. Idem intellige cùm præcedens fractio ſecundo modo reſolvitur.

Vnde colligere licet, cum ex ſola applicatione harum proportionalium, manente reſolutione fractionis aut eâdem aliquantulum immutatâ, complures viæ ultro quaſi ſeſe prodant, quibus à datis ad quæſitum perducamur, quanto ideo cum emolumento hujus Geometriæ calculus ad omnifarias quæſtiones adhibeatur; utpote cujus beneficio non modò difficultas omnis breviter ob oculos ponitur, ſed etiam quid circa illas ſit factu opùs plenè edocetur.

Cæterùm ut iis, quibus hujus generis Problemata arrident, quæ abſque ullo inſtrumento Mathematico in campo perfici queunt, etiam praxis allati Problematis conſtet, viſum fuit illud ſervando priorem fractionis reſolutionem ſecundùm ſuperiorem ejus applicationem per numeros illuſtrare, ut ſequitur.

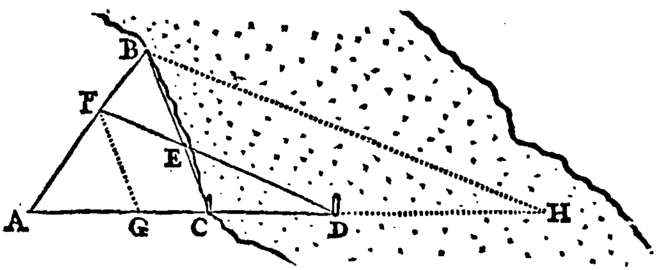
pedum

Eſto CA ꝏ a ꝏ 450
AD ꝏ b ꝏ 390
CD ꝏ c ꝏ 420
AE ꝏ d ꝏ 225
& CF ꝏ e ꝏ 252.

Tum fiat
Vt AE ad AD,
ſive CH ad CI, ita CF ad CK
225 — 390 — 252 / $436\frac{4}{5}$
CD. 420
ſubtr. CD. 420 ſubtr. CF. 252 ped.
Deinde, ut DK. $16\frac{4}{5}$ ad FD. 168, ita CA. 450 / ad AB. 4500.
Sive ut ID ad DB

PROBLEMA.

Trianguli ABC producto latere AC ad D, ductâque rectâ DEF, ſecante CB, AB in E & F, dantur AB ꝏ a, BC ꝏ b, AC ꝏ c, CD ꝏ d, & CE ꝏ e: oporteatque invenire AF ꝏ x.



Series *Analyſeos.*

Ductâ FG parallelâ BC, fiat propter ſimilitudinem triangulorum ABC & AFG

ut AB ad BC, ita AF ad FG

a — b — x / $\frac{bx}{a}$.

 Item.

Itemque

ut AB ad AC, ita AF ad AG   AC   GC

a —— c —— x / $\frac{cx}{a}$. quæ ſubducta ex c, relinquit $\frac{ca-cx}{a}$.

Hinc propter ſimilia $\triangle^{la}$ CED & GFD

erit

ut EC ad CD, ita FG   add. CD. d

e —— d —— $\frac{bx}{a}$ / ad GD. $\frac{da+ca-cx}{a}$.

Ac proinde per 16 ſexti

□EC, GD   □CD, FG

$$\frac{dae+cae-cex}{a} \infty \frac{dbx}{a}.$$

mult. utrinque per a

$$dae+cae-cex \infty dbx$$

add. utrinque cex

$$dae+cae \infty dbx+cex$$

div. utrinque per $db+ce$

$$\text{\& fit } \frac{dae+cae}{db+ce} \infty x.$$

Ad reſolvendam hanc fractionem, fiat ut e ad d, ita b ad 4^{tam}, quæ vocetur f: eritque $fe \infty db$, adeoque $x \infty \frac{dae+cae}{fe+ce}$ ſeu $\frac{da+ca}{f+c}$. Deinde fiat ut $f+c$ ad a, ita $d+c$ ad x. Quod ipſum docet, ut ex datis lineis inveſtigetur quæſita linea AF, ducendam eſſe ex B lineam BH ipſi FED parallelam, donec occurrat productæ ACD in H. Cum enim ſtatuendum ſit ut e ad d, hoc eſt, ut CE ad CD, ita b ſeu CB ad 4^{tam} f: patet hanc fore ipſam CH. Ac proinde ſi porrò fiat ut $f+c$ ad a, hoc eſt, ut AH ad AB, ita $d+c$ ſeu AD ad x: manifeſtum eſt inveniri hinc quantitatem quæſitæ lineæ AF; ita ut hîc ſicut in duobus præcedentibus Problematis demonſtratio ex ſola proportionalium applicatione per ſe perſpicua ſit.

Quòd ſi autem quis alio operandi modo aut etiam eodem ſed aliarum linearum ductu quæſitam lineam AF invenire deſideret, obſervare poterit ea, quæ à nobis in antecedenti Problemate indicata ſunt.

Cæterùm cum & praxis hujus Problematis in extruendis fortalitiis, chomatibus, promontoriis, aliiſve, non parvi uſus exiſtat: nimirum, ubi in fluvio, mari, aut locis paludoſis à certo

puncto

puncto ceu termino recta linea determinari debet, datum continens virgarum pedumve numerum: non abs re fuerit, ſi & illius praxin paucis hîc explicavero, præſertim cum abſque ullo inſtrumento Mathematico negotium hoc expedire liceat.

Ponamus itaque in directum ipſius A C à C uſque ad D definiendâ eſſe recta C D, continens 10 perticas ſeu virgas. In quem finem erectis tribus baculis, A, C, & B, efformantibus triangulum qualecunque A B C, ac inter B & C erecto ubicunque quarto E, ſi menſurentur A B, B C, A C, & C E, ſitque, ex. gr., A B ∞ *a* ∞ 15, B C ∞ *b* ∞ 13, A C ∞ *c* ∞ 14, & C E ∞ *e* ∞ 5 perticarum ſeu virgarum: oportebit ex his juxta & ipsâ C D ∞ *d* ∞ 10 quærere longitudinem lineæ A F, perinde ut ſupra atque ex ſequenti operatione videre eſt.

CE CD CB Add.
5 —— 10 —— 13 / ad C H. 26 A C. 14
add. A C. 14 A B C D. 10
A H. 40 —— 15 —— A D. 24 / ad A F. 9.

Hinc ſi ab A versùs B in recta A B menſurentur 9 perticæ ſeu virgæ, atque in F hujus menſurationis termino baculus erigatur, fiet, ut, ſi à C in directum ipſius A C progrediamur, extruendo aggerem aut etiam navigando cum ſcapha, donec perventum fuerit in directum ipſius F E, recta C D tunc 10 perticarum ſeu virgarum ſit futura, qualis requirebatur.

Qui plura hujus generis Problemata videre deſideret, adeat Appendicem noſtram de Simplicium Problematum conſtructione, quam unà cum Exercitationibus noſtris Mathematicis haud ita pridem in lucem emiſimus, ubi iſta fuſiùs pertractantur, etiam ſine ullius calculi adjumento.

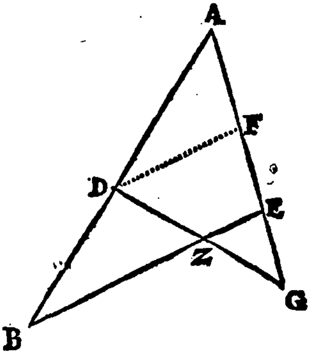
PROBLEMA,

cujus ſolutione innoteſcit, quâ ratione priora duo Theoremata II^{mi} *Capitis* I^{mi} *libri Almageſti* PTOLEMÆI *inventa fuerint ſeu inveniri poſſint.*

In rectas A B, A G ductis utcunque rectis B E, D G, ſe mutuò decuſſantibus in Z, detur ratio G D ad D Z,

ut

ut a ad b, nec non ratio Z B ad B E, ut c ad d: oporteatque invenire rationem G A ad A E.



Series *Analyſeos*.

Eſto $GD \infty a$

$DZ \infty b$, eritque $ZG \infty a - b$

$BZ \infty c$

$BE \infty d$, eritque $ZE \infty d - c$

$AG \infty x$

& $AE \infty y$, eritque $EG \infty x - y$.

Ductâ D F parallelâ B E, erit per 2 ſexti

ut G Z ad Z D, ita G E Ex A E. y

$a - b$ —— b —— $x - y$ / ad E F. $\frac{bx - by}{a - b}$ } ſubtr.

rel. A F. $\frac{ay - bx}{a - b}$.

Tum fiat propter ſimilia △[la] G Z E & G D F

ut G Z ad Z E, ita G D / ad D F. $\frac{ad - ac}{a - b}$.

$a - b$ — $d - c$ —— a

Quibus ſic conſtitutis, erit ex ſimilitudine △[lorum] D A F & B A E

ut D F ad A F, ita B E ad A E

$\frac{ad - ac}{a - b}$ — $\frac{ay - bx}{a - b}$ —— d / y

Et fit per 16 ſexti

$$\frac{ady - acy}{a - b} \infty \frac{ady - bdx}{a - b}.$$

Hoc eſt, omiſſo communi denominatore $a - b$

erit $ady - acy \infty ady - bdx$.

Vnde dempto utrinque ady, ac reliquis hinc inde tranſlatis, ut ſigno + adficiantur

habebitur $bdx \infty acy$.

Quæ æqualitas in proportionem ſic reſolvitur

ut x ad y, ita ac ad bd.

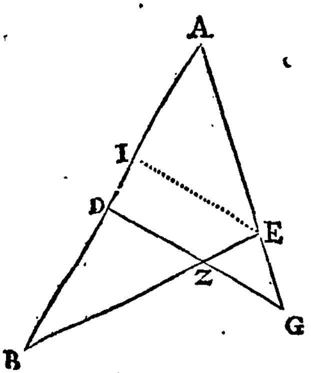
Quod

Quod ipſum docet, rationem quæſitam G A ad A E ſeu *x* ad *y* eſſe compoſitam ex ratione G D ad D Z ſeu *a* ad *b*, & ex ratione Z B ad B E ſeu *c* ad *d*, id eſt, rationem G A ad A E per 23 ſexti eſſe eandem, quàm rectanguli ſub G D, B Z ſeu *a c* ad rectangulum ſub B E, D Z ſeu *b d*. Atque ita conſtat, quo pacto primum dictorum Theorematum inventum fuerit ſeu inveniri poſſit. Id autem ex Rheinoldi verſione ita ſonat.

In duas rectas lineas A B & A G deductæ duæ rectæ »
lineæ B E & G D ſecent ſe mutuò in puncto Z. Dico »
quòd ratio G A ad A E compoſita eſt ex ratione G D ad »
D Z, & ex ratione Z B ad B E. »

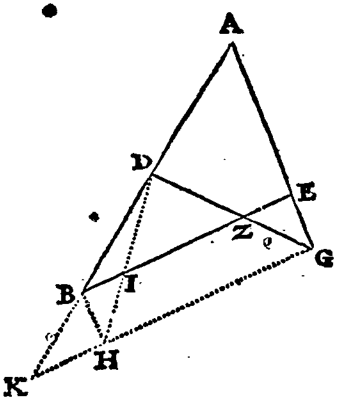
Hinc poſtquam innotuit, quo pacto datis rationibus G D ad D Z, & Z B ad B E etiam dari intelligatur ratio ipſius G A ad A E, utpote quæ ex datis hiſce rationibus eſt compoſita: haud inutile fuerit, ſi ulteriùs hîc oſtendam, quibus datis lineis hæc quæſita ratio exprimatur, quandoquidem ratio dari dicitur cui eandem exhibere valemus.

In quem finem ſi inventa ratio *a c* ad *b d* ad communem altitudinem redigatur, quod quidem quadrupliciter fieri poteſt, ſumendo ad hoc aliquam ex datis lineis, obtinebitur quæſita ratio in ſimpliciſſimis terminis.



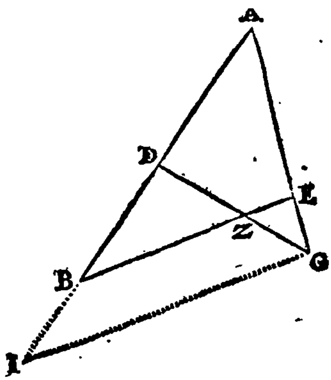
Etenim aſſumendo communem altitudinem *c*, ſi fiat ut *c* ad *d*, ita b ad 4^{tam}, quæ vocetur *e* : erit *c e* ∞ *b d*, ita ut quæſita ratio ſit eadem, quæ *a c* ad *c e*, hoc eſt, rejectâ communi altitudine *c*, ut *a* ad *e*. Quod ipſum Ptolemæi figuram prodit, in qua ex puncto E ducta eſt E I parallela ipſi G D. Si enim in ea fiat ut *c* ad *d*, id eſt, ut Z B ad B E, ita D Z ſeu *b* ad 4^{tam} *e*, erit ea linea E I; ita ut G D ad E I ſeu *a* ad *e* quæſitam rationem manifeſtet, eandem quippe quæ eſt ipſius G A ad A E. Vt patet ex 4ta ſexti, propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ D A G & I A E.

Sic etiam aſſumendo communem altitudinem *a*, ſi fiat ut *a* ad *b*,

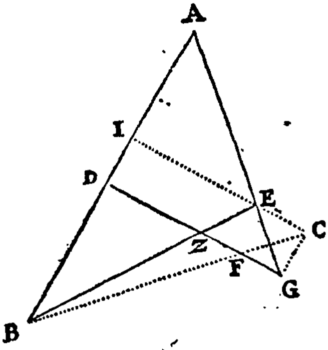


hoc eſt, ut D G ad D Z, ita H G vel B E ſeu *d* ad 4^tam^, quæ vocetur *f*: erit ea ∞ Z I. Et ſit *af* ∞ *bd*, ita ut quæſita ratio ſit eadem, quæ *ac* ad *af*, hoc eſt, rejectâ *a* communi altitudine, eadem quæ *c* ad *f* ſeu B Z ad Z I. Hanc autem eandem eſſe, quam ipſius G A ad A E, ita patet.

Productis namque A B, G H donec coëant in K, erit propter ſimilitudinem △^rum^ B D Z, K D G, lineamque D H ſimiliter in utroque ductam, ut B Z ad Z I, ita K G ad G H ſeu B E. Vt autem K G ad B E, ita eſt, propter ſimilitudinem △^rum^ K A G & B A E, quoque G A ad A E. Quare etiam B Z ad Z I erit, ut G A ad A E. Vnde liquet, ſi *a* pro communi altitudine ſumatur, ducendam eſſe ex G rectam G H ipſi B E parallelam, donec occurrat rectæ ex B ductæ ipſi A G parallelæ in H: eritque, junctâ H D, B Z ad Z I ratio quæſita.



Haud ſecus, ſi aſſumatur communis altitudo *b*, fiatque ut *b* ad *a*, hoc eſt, ut Z D ad D G, ita B Z ſeu *c* ad 4^tam^, quæ vocetur *g*: erit ea ∞ I G. Et ſit *bg* ∞ *a c*, ita ut quæſita ratio G A ad A E eadem ſit, quæ *bg* ad *bd*, hoc eſt, rejectâ communi altitudine *b*, eadem quæ *g* ad *d* ſeu I G ad B E. ut patet ex ſimilitudine △^rum^ I A G & B A E. Quod ipſum arguit, ſumendo *b* pro communi altitudine, ducendam eſſe ex G rectam G I ipſi B E parallelam, donec occurrat productæ A B in I, ut habeatur ratio quæſita I G ad B E.

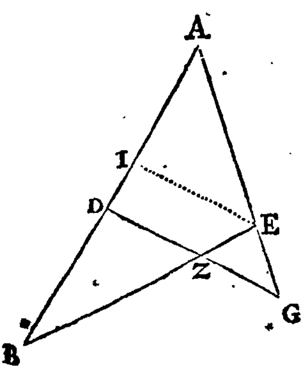


Nec aliter fit, ſi, aſſumptâ communi altitudine *d*, fiát ut *d* ad *c*, hoc eſt, ut B E ad B Z, ita G D vel I C ſeu *a* ad 4^tam, quæ vocetur *b*: erit ea ∞ D F. Et fit *d b* ∞ *a c*, ita ut quæſita ratio ſit eadem, quæ *d b* ad *b d*, hoc eſt, rejectâ communi altitudine *d*, eadem quæ *b* ad *b* ſeu D F ad D Z.

Hanc autem eandem eſſe, quam G A ad A E, ita patet.

Eſt enim, propter ſimilitudinem △^rum B D F & B I C, lineamque B E in utroque ſimiliter ductam, ut D F ad D Z ita C I ſeu D G ad I E. Vt autem D G ad I E, ita eſt, propter ſimilitudinem △^rum D A G & I A E, G A ad A E. Quocirca & D F ad D Z erit, ut G A ad A E. Atque ita liquet, ſumendo *d* pro communi altitudine, ducendam eſſe ex G rectam G C ipſi B A parallelam, donec occurrat rectæ per E ipſi D G parallelæ in C, rationem quæſitam eſſe D F ad D Z.

Cæterùm ut pateat, qua ratione demonſtratio præcedentis Theorematis, qualis à Ptolemæo affertur, ex allatis deduci poſſit; ut & quo pacto exinde plures alias demonſtrationes ſimiles conficere liceat: viſum fuit eandem unà cum aliis tribus, à me deductis, hîc ſubjungere, calculique veſtigia, quibus innituntur, ſimul hîc adhibere atque patefacere.



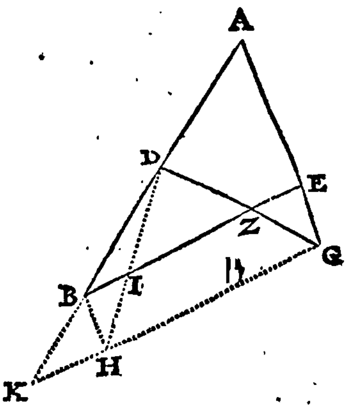
Vt ſupra eſt
ZB BE DZ IE
c——*d*——*b* / *e*
& *c e* ∞ *b d*.

Ratio
GA ad AE
a c .... *b d*
vel *a c* .... *c e*
ſeu GD EI
a .... *e*
DZ BE
med. term. *b* *d*
ZB
c

Demonſtratio PTOLEMÆI.

„ *Ducatur enim per punctum E linea E I æquidiſtans* „ *lineæ G D.*

„ *Quoniam igitur lineæ G D & E I ſunt æquidiſtantes,* „ *ratio lineæ G A ad A E eadem eſt, quæ eſt lineæ G D ad* „ *lineam E I. Adſumatur autem deforis linea Z D. Erit* „ *igitur compoſita ratio lineæ G D ad lineam E I ex ratio-* „ *ne lineæ G D ad lineam D Z, & ex ratione lineæ D Z ad* „ *lineam E I. Quare & ratio lineæ G A ad lineam A E* „ *compoſita eſt ex ratione lineæ G D ad lineam D Z, & ex* „ *ratione lineæ D Z ad lineam E I. Eſt autem & ratio* „ *lineæ D Z ad E I eadem rationi lineæ Z B ad lineam* „ *B E; cum æquidiſtantes ſint lineæ E I & Z D. Ratio igi-* „ *tur lineæ G A ad lineam A E compoſita eſt ex ratione li-* „ *neæ G D ad lineam D Z, & ex ratione lineæ Z B ad li-* „ *neam B E. Quod erat demonſtrandum.*



Aliter.

Vt ſupra eſt   Ratio
GD DZ BE vel HG ZI   GA ad AE
a—*b*——*d* / *f*   *ac* ...... *bd*
& *af* ∞ *bd*.   vel *ac* ...... *af*
                BZ   ZI
            ſeu *c* ...... *f*

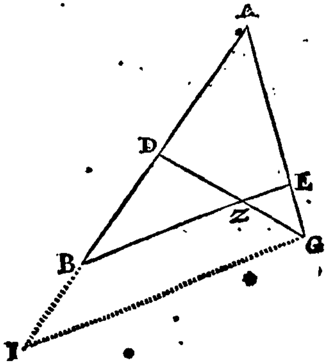
            DZ
BE vel HG   *b*.
med. term. *d*.
GD
a.

Ductâ G K parallelâ ipſi B E, donec occurrat productæ A B in K, agatur B H æquidiſtans A G, occurrens ipſi K G in H, jungaturque H D, ſecans B E in I.

Quoniam itaque, propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ K A G & B A E, G A eſt ad A E, ſicut K G ad B E vel H G; ſed ut K G ad G H, ita quoque eſt, propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ K D G & B D Z, lineamque D H in utroque ſimiliter ductam, B Z ad Z I. Quare etiam

etiam erit G A ad A E, ſicut B Z ad Z I. Hinc aſſumpta forinſecus lineâ B E, quoniam ratio B Z ad Z I compoſita eſt ex ratione B Z ad B E, & ex ratione B E vel H G ad Z I, id eſt, propter ſimilitudinem △rum H D G & I D Z, ex G D ad D Z: erit perinde ratio G A ad A E compoſita ex ratione B Z ad B E, & ex ratione G D ad D Z. Quod erat oſtendendum.

Adhuc aliter.

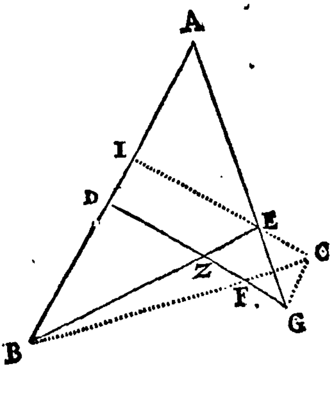


Vt ſupra eſt
DZ GD BZ IG
b——*a*——*c*/*g*
& *bg* ∞ *ac*.

Ratio
GA ad AE
ac ...... *bd*
vel *bg* ...... *bd*
IG BE
ſeu *g* ...... *d*
GD BZ
a *c* med. ter.
DZ
b

Etenim ductâ G I parallelâ B E, uſque dum occurrat productæ A B in I: erit propter ſimilitudinem △rum I A G & B A E, ut G A ad A E, ita I G ad B E. Hinc cum, aſſumptâ forinſecus rectâ B Z, ratio ipſius I G ad B E compoſita ſit ex ratione I G ad B Z, id eſt, propter ſimilitudinem △rum I D G & B D Z, ex G D ad D Z, & ex ratione B Z ad B E: erit pariter ratio G A ad A E ex iiſdem rationibus compoſita. Quod erat oſtendendum.

Vel etiam hoc pacto:



Vt ſupra eſt
BE BZ GD DF
d — *c* — *a*/ *h*
& *dh* ∞ *ac*.

Ratio
GA ad AE
ac .... *bd*
vel *dh* .... *bd*
DF DZ
ſeu *h* .... *b*
BZ
c DG vel IC
a med.ter.
BE
d.

 Ductâ

Ductâ G C ipſi B A parallelâ, donec occurrat rectæ I E C ipſi D G parallelæ in C, jungatur B, ſecans D G in F.

Quoniam itaque, propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ D A G & I A E, G A eſt ad A E, ſicut G D vel I C ad I E; at ut I C ad I E, ita quoque eſt, propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ B I C & B D F, lineamque B E in utroque ſimiliter ductam, D F ad D Z: erit etiam G A ad A E, ſicut D F ad D Z. Aſſumatur jam forinſecus linea D G. Hinc cum ratio D F ad D Z ſit compoſita ex ratione D F ad D G, vel I C, ſive B Z ad B E, & ex ratione D G ad D G: erit ſimiliter ratio G A ad A E compoſita ex ratione B Z ad B E, & ex ratione D G ad D Z. Quod erat oſtendendum.

Idem pariter de 2do Ptolemæi Theoremate aliisque ſimilibus eſt intelligendum.

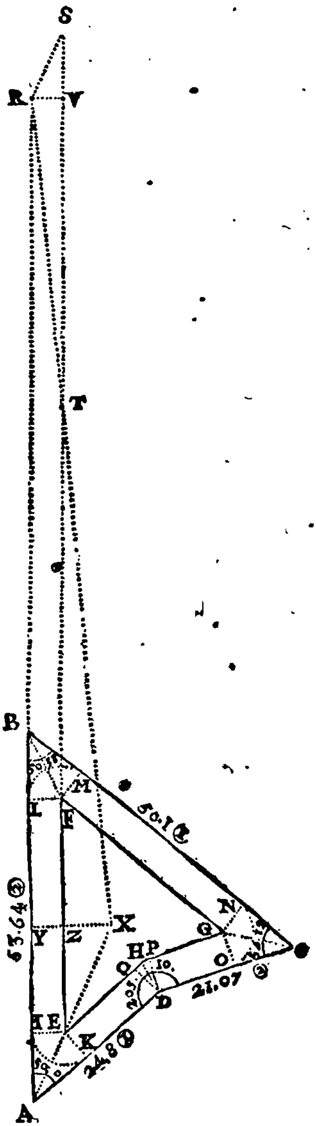
Unde conſtat, præſuppoſitâ Algebræ cognitione, haudquaquam neceſſaria eſſe exiſtimanda, quæ de Rationum Logiſtica communiter traduntur, non magis quàm ſi ad cujuſvis generis quæſtiones per Algebram ſolvendas multifaria addiſcantur Theoremata: cum & invenire illa & demonſtrare ipſius Algebræ ſit munus, quam quidem excolendo non modò ingenium exercetur, ſed res ipſa funditus eruitur, citra eam verò ſæpiſſime illa ipſa Theoremata non ſatis feliciter adhibentur.

Problema.

Latifundii A B C D cognitis omnibus lateribus & angulis, ab eodem datam portionem reſecare, lineis E F, F G, G H, & H E latifundii lateribus A B, B C, C D, & D A parallelis, & ab iiſdem pari ubique intervallo diſſitis.

Iunctis A E, B F, C G, & D H, demittantur ex E, F, & G ſuper A B, B C, C D, & D A perpendiculares E I, F L, F M, G N, G O, & E K; at ex D ſuper G H & H E perpendiculares D P & D Q.

Quoniam itaque in rectangulis triangulis A I E & A K E quadrata,



drata, quæ fiunt ex A I, I E nec non ex A K, K E quadrato ex A E *per* 47 *primi Elementorum* ſunt æqualia, erunt & ipſa inter ſe æqualia. Eſt autem quadratum ex E I æquale quadrato ex E K, quippe ob æqualitatem rectarum E I, E K, æquale intervallum indicantium; Quare etiam quadratum ex A I quadrato ex A K æquale erit, adeoque & A I æqualis A K. Hinc cum tria latera trianguli A I E æqualia ſint tribus lateribus trianguli A K E, erit quoque angulus I A E angulo K A E *per* 8 *primi* æqualis, ac proinde angulus B A D per rectam A E bifariam diviſus. Haud ſecus liquet, angulos ad B, C, & D per rectas B F, C G, & D H bifariam diviſos eſſe.

Series *Analyſeos*.

Eſto A B ∞ *a*
B C ∞ *b*
C D ∞ *c*
D A ∞ *d*
& E I, F L, F M, G N, G O,
D P, D Q, vel E K ∞ *x*.

Iam cum propter datos angulos A, B, C, & D etiam eorum ſemiſſes dati ſint, erit in unoquoque triangulorum ad angulos hoſce conſtitutorum data quoque ratio laterum.

Pona-

Ponatur itaque E I ad I A vel E K ad K A eſſe, ut e ad f
F L ad L B vel F M ad M B, ut e ad g
G N ad N C vel G O ad O C, ut e ad h
& D P ad P H vel D Q ad Q H, ut e ad i.

Tum fiat EI vel EK AI vel AK
ut e ad f, ita x / ad $\frac{fx}{e}$
FL vel FM LB vel BM
ut e ad g, ita x / ad $\frac{gx}{e}$
GN vel GO NC vel CO
ut e ad h, ita x / ad $\frac{hx}{e}$
DP vel DQ PH vel HQ
ut e ad i, ita x / ad $\frac{ix}{e}$

Additis jam A I, A K, L B, B M, N C, C O, ſi ipſarum ſumma $\frac{2fx + 2gx + 2hx}{e}$ auferatur ex $a + b + c + d$, ſumma laterum A B, B C, C D, & D A, relinquetur $a + b + c + d \frac{-2fx - 2gx - 2hx}{e}$, ſumma rectarum I L, M N, O D, & D K, id eſt, ipſarum E F, F G, G P, & Q E. Quibus ſi addatur $\frac{2ix}{e}$, ſumma ipſarum P H, H Q, erit $a + b + c + d \frac{-2fx - 2gx - 2hx + 2ix}{e}$ ſumma laterum internorum E F, F G, G H, & H E. Porrò quoniam portio abſcindenda, quæ vocetur k, pro trapezio accipi poteſt, cujus duo latera ſunt parallela, fit ut ſi A B, B C, C D, & D A in rectam lineam A R junctim collocentur, ut & E F, F G, G H, & H E in rectam lineam E T, trapezium A R T E ipſi portioni abſcindendæ k futurum ſit æquale. Quocirca ſi juxta vulgarem regulam hujus area quæratur, addendo ſcilicet latera parallela A R & E T, & ſemiſſem ſummæ multiplicando per ipſius latitudinem E I ſeu x, habebitur æquatio inter $ax + bx + cx + dx \frac{-fxx - gxx - hxx + ixx}{e}$ & k, id eſt, æquatione ritè ordinatâ, erit $xx \propto \frac{aex + bex + cex + dex}{f + g + h - i} - \frac{ke}{f + g + h - i}$. Cujus radices inveniuntur operando ulteriùs, quemadmodum pag. 7 hujus

Geo-

Geometriæ indicatur, quarum quidem major dum lineam exhibet quæſitâ EI manifeſtè majorem, idcirco meritò hîc erit negligenda.

Quoniam autem ex E, F, G, & D intervallis EI vel EK, FL vel FM, GN vel GO, & DP vel DQ deſcriptis circulis rectæ AI vel AK, LB vel BM, NC vel CO, & PH vel HQ tangentes ſunt complementorum ſemiſſium datorum angulorum A, B, C, & D; fiet ut, ſi *e* pro radio ſumatur, ipſæ *f*, *g*, *h*, & *i* dictas tangentes deſignent. Quod cum eodem modo de omnibus aliis figuris rectilineis intelligendum ſit, à quibus hujuſmodi portio reſecari debet: haud difficulter poterimus, ſi angulos A, B, C, ſimileſque vocemus externos, at angulum D internum, ut & eos omnes, qui hujuſce generis exiſtunt, atque præter æquationis conſtitutionem ſpectemus inſuper, quænam ad illam reſolvendam ſive ad quæſitam latitudinem ex ea obtinendam ſint facienda, regulam inde generalem formare, quæ ſic ſe habet.

Additis figuræ lateribus, multiplicetur ſumma per radium 100000, productumque dividatur per ſummam tangentium, angulorum qui ſemiſſium datorum ſunt complementa, cùm videlicet dati anguli omnes ſunt externi, aut per earundem differentiam, quum externi ac interni exiſtunt, & fit primum inventum.

Deinde multiplicatâ areâ portionis abſcindendæ per radium 100000, dividatur productum per prædictam ſummam vel differentiam tangentium, & fit ſecundum inventum. Quo ſubducto à quadrato ſemiſſis primi inventi, ſi reliqui radix ab eodem ſemiſſe auferatur, relinquetur latitudo quæſita.

Inventâ igitur per Algebram viâ, quâ Problema propoſitum ſolvendum ſit, ipſius veritas ex ſequentis calculi applicatione, quæ ab ea parùm eſt aliena, manifeſta fiet; ſi modò ibidem conſideraverimus, completo parallelogrammo ARSE, productiſque AE, RT donec coëant in X, rectam ST, duplum ſupra dictæ ſummæ vel differentiæ tangentium referre, atque demiſſis perpendicularibus RV & XY rectam ST ad RV, ob ſimilitudinem triangulorum STR & ARX, eam habere rationem, quam AR habet ad XY.

Angul.

A. 50. 0′ Add.

ſemiſſis. 25. 0′, ejus Tang. Compl.

B. 50. 38′ A I vel A K eſt 214451

ſemiſſis. 25. 19, ejus Tang. Compl.

C. 54. 12′ L B vel B M eſt 211392

ſemiſſis. 27. 6, ejus Tang. Compl:

N C vel C O eſt 195417

621260

D. 205. 10′

ſemiſſis. 102. 35, ejus Tang. Compl. } ſubtr.

P H vel H Q eſt 22322

differentia 598938.

2 Rad. R V.

	Add.
A B.	53|64
B C.	50|1
C D.	21|07
D A.	24|8

partes S T. 1197876 — 100000 — AR. 149,61 ②

multipl.

AR. 14961 ②

ad XY. 1249 ②.

134649

59844

29922

14961

product. 1868|6289 ④

ſemiſſis ſeu triang. ARX. 934|3144 ④

ſubtr. part. reſec. ſeu trap. ARTE. 600|

Vt △ ARX ſeu ½ XY, AR ad □ XY ſeu XY, XY, vel, relicta communi altitudine XY ut ½ AR ad XY, ſive etiam, propter ſimil. △^rum STR & ARX ut ½ ST ad RV, ita

598938 — 100000 — rel. triang. ETX. 334|3144 ④ / ad □ XZ. 55|81|78 ④.

eritque XZ. 7|4|.7 ②.

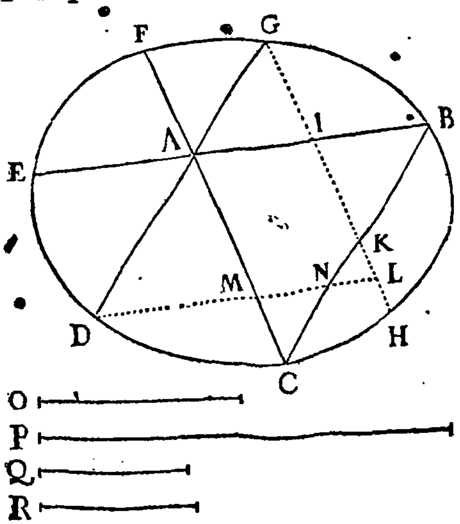
Hinc ſubducta XZ ſeu 747 ② ex XY ſeu 1249 ②, relinquetur 502 ② pro YZ latitudine quæſita portionis abſcindendæ.

Cæterùm cum non abſimili modo à data qualibet figura rectilinea portio datæ magnitudinis abſcindi poſſit, aut etiam quæ ipſius figuræ certam partem ſive partes contineat, lineis quibuſdam duntaxat lateribus parallelis & ab iiſdem æquali intervallo diſtantibus: plura hac de re afferre ſupervacaneum duximus, præſertim cum materiam hanc nec non determinationes eò ſpectantes jam ſæpiùs in Lectionibus noſtris Publicis abundè pertractaveri-

verimus, eaque occaſione illa multis etiam jam diu innotuiſſe certò ſciverimus.

THEOREMA,
quod ad ſolutionem artificioſiſſimam Problematis pag. 372 ut conceſſum ſupponitur.

Cum in rimanda olim ſolutione Problematis p. 372 nonnulla deprehendiſſem, quæ ad eandem ut conceſſa ſupponebantur, eaque poſt commentarios meos in hanc Geometriam Theoremate ad id Geometricè reſoluto corroboràſſem: viſum fuit calculum è quo eandem reſolutionem tunc deprompſi hîc in medium afferre, ac quo pacto idem à me ſit præſtitum eâ quâ potero perſpicuitate cuivis ob oculos ponere. In quem finem ſi huc revocetur Theorema jam dictum unà cum illis, quæ ad explicationem ejus p. 369 & 370 ulteriùs ſunt allata, inſpiciendus erit deinceps ſequens calculus.



Aſſumpto quæſito ut vero, hoc eſt, C A eſſe ad A F, ſicut C B ad A G ducatur porrò D L parallela A B, ſecans C A, C B in M & N, ac occurrens ipſi G H in L, ponaturque D A ∞ y.

Deinde calculus ſic procedat

Ex aſſumptione eſt
C A A F C B A G

c —— d —— b / ad $\frac{db}{c} \infty z$

Ex ſimilitudine $\triangle$lorum B A C & A I G eſt
B C C A A G G I

b —— c —— $\frac{db}{c}$ / ad d. Vnde I K erit $\infty c - d$. pro qua brevitatis causâ ſcribatur f.

Et apparet ex hac aſſumptione G I inveniri æqualem F A,

 item-

itemque

CA AB GI IA

c — a — d / ad $\frac{ad}{c}$ } add.

Ex ſimilitudine △rum CAB & KIB eſt

AE. e

EI. $\frac{ce+ad}{c}$ } Mult.

CA AB KI

c — a — f / ad IB. $\frac{af}{c}$

□EIB. $\frac{ceaf+adaf}{cc}$

Denique ex natura Ellipſis, per 17.3tii Conicorum Apollonii,

□GIH eſt ad □FAC.

Seu, propter rectas GI, FA, ſupra æquales,

IH ad AC, ut □EIB ad □EAB

$\frac{cef+adf}{ce}$ — c — $\frac{ceaf+adaf}{cc}$ — ea.

Et fit, multiplicando tum medios tum extremos, $ace+aad \infty ace+aad$.

Ex hypotheſi eſt

BA AE BC AD

a — e — b / ad $\frac{eb}{a} \infty y$

Ex natura Ellipſis, per 17.3tii Conicorum Apollonii, proportionalia ſunt

□FAC □GKH □DAG □CKB

dc — cx — yz — bz — zz

ſeu, rejectis communibus altitudinibus AC, GK; & AG, CK

FA KH DA KB

d — x — y — b — z

hoc eſt, reſtitutis valoribus ipſarum y & z

d — x — $\frac{eb}{a}$ — $\frac{cb-db}{c}$ ſeu $\frac{fb}{c}$

Unde KH ſeu x, per 16.6ti, fit $\infty \frac{acd-add}{ce}$ ſeu $\frac{adf}{ce}$

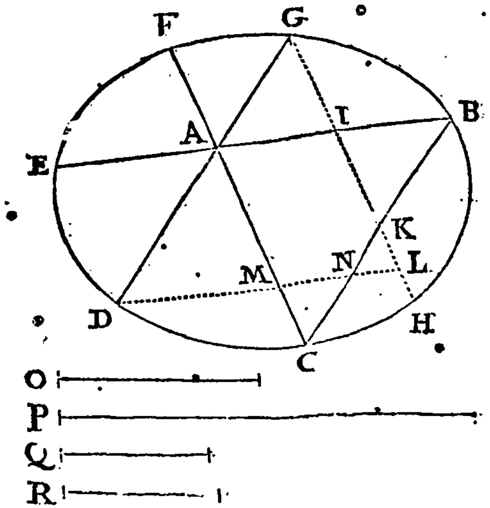
add. IK. f,

IH. $\frac{cef+adf}{ce}$

Id quod arguit, cum aſſumendo quæſitum tanquam conceſſum per calculum hunc Geometricum ad verum conceſſum devenerimus, quæſitum illud, quod cum hoc conceſſo omnimode connectitur, eſſe quoque verum. Quod erat oſtendendum.

Porrò ut intelligatur, quâ ratione ex hoc calculo ſupradicta reſolutio à me deducta fuerit: haud gravabor eundem calculum hîc ulteriùs ita diſponere, dictamque reſolutionem illi à latere ſic adhibere, ut cuivis ſedulò hæc inſpicienti enucleatè appareat, quiſnam inter illum & hanc reſolutionem mutuus conſenſus exiſtat. Præſértim cum hujus reſolutionis inventio deinde mihi anſam, complures alias demonſtrationes Geometricas conficiendi, ſub-

ſubminiſtraverit; atque ipſa etiam artificium detexiſſe mihi viſa ſit, quo Veteres, in multis difficilioribus demonſtrationibus concinnandis, uſi ſunt. Qui quidem id unicè ſtuduiſſe videntur, quò ſua inventa eorumque demonſtrationes poſteris majori admirationi forent, ut modum, quo ea ipſa invenerint ac demonſtrationibus muniverint, prorſus ſupprimerent & abſconderent.



Ex aſſumptione
CA AF CB AG
c — d — b / ad $\frac{db}{c}$ ∞ z.

Et permutando per 16. 5
CA CB AF AG
c — b — d / ad $\frac{db}{c}$

Ex ſimilitudine △^{rum} BAC, AIG
BC CA AG GI
b — c — $\frac{db}{c}$ / ad d.

Et convertendo per Cor. 4. 5
CA CB GI AG
c — b — d / ad $\frac{db}{c}$

Quoniam igitur ſupponitur CA eſſe ad AF, ſicut CB ad AG; erit etiam permutando CA ad CB, ſicut AF ad AG. Iam quia, ex ſimilitudine △^{rum} BAC & AIG, BC eſt ad CA, ſicut AG ad GI; & convertendo CA ad CB, ſicut GI ad AG: erit AF per 9.5^{ti} ipſi GI æqualis. Eodem modo æquales erunt EA & DM.

Quia hîc ex aſſumptione reperitur GI exprimi per eandem quantitatem quam AF, colligitur inde ipſas æquales eſſe.
Haud ſecus æquales erunt EA & DM.

Ex hypotheſi

BA AE BC AD

$a - e - b$ / ad $\frac{eb}{a} \infty y$.

Ex natura Ellipſis, per 17. 3^{tii} Conicorum Apollonii

□FAC □GKH □DAG □CKB

$dc - cx - yz - bz - zz$

H.e., rejectis communibus altitudinibus A C, G K; & A G, C K,

FA KH DA KB

$d - x - y - b - z$

Et reſtitutis ipſarum y & z valoribus

FA KH DA KB

$d - x - \frac{eb}{a} - \frac{cb - db}{c}$ ſeu $\frac{fb}{c}$

$ceb - afb$

KH $ce - af$

Fit $x \infty \frac{adf}{ce}$.

Iam ut ex Elementis conſtet, quo pacto ratio ipſius D A ad K B in ſimpliciſſimis terminis exprimi poſſit, cum via illam inveniendi multiplicatione per crucem (quemadmodum vulgo fit) omnino ſit Algebraïca: calculum hîc apponam è quo ipſæ D A & K B reſultant.

Porrò cum ex natura Ellipſis □ F A C ſit ad □ G K H, ſeu, propter rectarum A C, G K æqualitatem, F A ad K H, ſicut □ D A G ad □ C K B, h. e., propter æqualitatem rectarum A G, C K, ut D A ad K B; & quidem ratio D A ad K B, compoſita ſit ex ratione D A ad C B ſeu E A ad A B, & ex ratione C B ad K B ſeu C A ad I K: erit quoque ratio F A ad K H compoſita ex ratione E A ad A B, & ex ratione C A ad I K. Ideoque cum ratio compoſita ex ratione E A ad A B, & ex ratione C A ad I K, ſit ea, quam habet □ CAE ad □ K I, A B: erit ſimiliter ratio ipſius F A ad K H ea, quam habet □ C A E ad □ K I, A B.

BA AE BC AD

$a - e - b$ / ad $\frac{eb}{a}$

CA IK BC KB

$c - f - b$ / ad $\frac{fb}{c}$

EA AB

$e - a$

CA IK

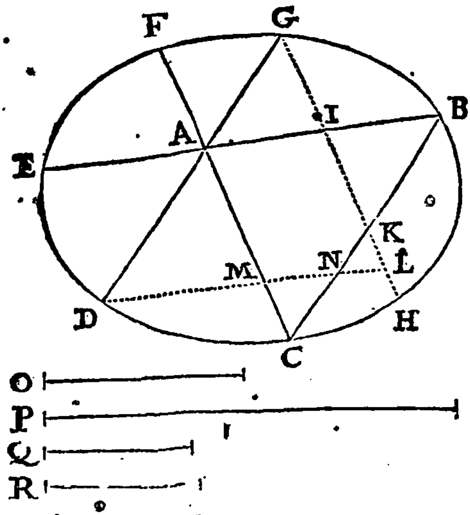
23.6. $c - f$

□CAE □KI,AB

$ce - af$

Vbi apparet, cum in utraque hac proportionis regula idem terminus B C ipſis A D & K B præcedat, quod ratio ipſius A D ad K B, per hujus B C interpoſitionem, ſit compoſita ex ratione A D ad B C ſeu E A ad A B, hoc eſt, *e* ad *a*, & ex ratione B C ad K B ſeu C A ad I K; hoc eſt, *c* ad *f*. Ac proinde, cum ratio ex his compoſita, per 23. 6, ſit eadem rationi, quam habet □CAE ad □KI,AB, ſeu *ce* ad *af*: erit quoque

que ratio ipſius F A ad K H ſeu d ad x eadem, quam habet □ C A E ad □ K I, A B, ſeu ce ad af.



Ad comparandam I H cum A C, quia, inventâ K H ∞ $\frac{adf}{ce}$, ad K H addi priùs debet I K ∞ f, ut habeatur I H ∞ $\frac{cef+adf}{ce}$, ſed hoc pacto ratio ipſius I H ad A C non ſatis commodè videtur Geometricè explicabilis: quæſivi priùs rationem ipſius I H ad I K; inde per compoſitionem rationis converſam, & per alias denique comparationes venio ad rationem ipſius I H ad A C, ut ſequitur.

Eſto K I ad F A, K H

f ——— d x

ut O ad C A.

3 * $\frac{cf}{d}$ ——— c

Mult. per A E. e . . . . e

hoc eſt, ut □ O, A E ad □ C A E □ K I, A B

per 1. 6. $\frac{cef}{d}$ ——— ce . . . . . . af

Vnde ex æquo & per compoſitionem rationis converſam erit

Vt K I + K H ſeu I H ad K I,

$f + x$ ——— f

ſic □ O, A E + □ K I, A B ad □ O, A E.

$\frac{cef}{d} + af$ ——— $\frac{cef}{d}$

Eſto jam K I ad F A, ſicut linea O ad C A. Vnde, aſſumptâ A E pro communi altitudine, erit K I ad F A, ſicut □ ſub O & A E ad □ C A E. Erat autem F A ad K H, ſicut □ C A E ad □ K I, A B. Quare ex æquo erit ut K I ad K H, ſic □ O, A E ad □ K I, A B; & per compoſitionem rationis converſam K I + K H ſeu I H ad K I, ſicut □ O, A E + □ K I, A B, ad □ O, A E.

Sit

IH Sit KI ad AC,

$f+x$ . . . . f ———— c

ut O ad P. 4*

$\frac{cf}{d}$ ———— $\frac{cc}{d}$

Mult. per AE. e . . . . e

hoc eſt,

□O,AE+□KI,AB ut □O,AE ad □P,AE

$\frac{cef+adf}{d}$ . . . . $\frac{cef}{d}$ ———— $\frac{cce}{d}$

Vnde ex æquo erit ut IH ad AC, ita □O,AE+□KI,AB ad □P,AE.

Sed ut IH ad AC, ita quoque eſt propter rectas IG & EA ſupra æquales

mult. per IG. . . . . . FA

per 1.6. □GIH ad □FAC, hoc eſt, per 17.3tii Conic. Apoll., ut □EIB ad □EAB.

Quocirca erit ut □O,AE+□KI,AB ad □P,AE, ita □EIB ad □EAB.

Deinde ſit ut KI ad AC, ita O ad P. Vnde, aſſumptâ AE pro communi altitudine, erit KI ad AC, ſicut □O,AE ad □P,AE. Sed ut IH ad KI, ita eſt □O,AE+□KI,AB ad □O,AE. Quapropter ex æquo erit ut IH ad AC, ſic □O,AE+□KI,AB ad □P,AE. Cum verò rurſus, ut ante, □GIH ſit ad □FAC, ſicut □EIB ad □EAB; & quidem IG & AF, ut ſupra, æquales ſint oſtenſæ: erit quoque IH ad AC, ſicut □EIB ad □EAB. Vt autem IH ad AC, ſic quoque erat □O,AE+□KI,AB ad □P,AE. Quocirca erit ut □O,AE+□KI,AB ad □P,AE ita □EIB ad □EAB.

Fiat jam, ut AE ad AB, ita KI ad Q

e —— a —— f / $\frac{af}{e}$. 5*

eritque per 16.6. □KI,AB ∞ □Q,AE.

Adeoque ut

□O,AE+□KI,AB, ſeu Q,AE ad □P,AE,

hoc eſt, rejectâ communi altitudine AE,

ut O+Q ad P, ſic □EIB ad □EAB.

$\frac{cf}{d}+\frac{af}{e}$ —— $\frac{cc}{d}$ —— $\frac{ceaf+adaf}{cc}$ —— ea

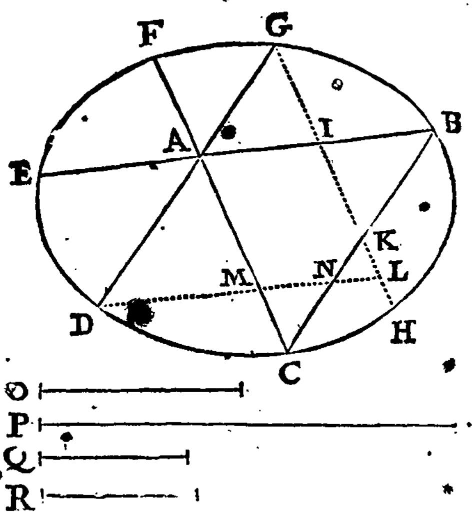
Fiat jam ut AE ad AB, ita KI ad Q: eritque □KI,AB æquale □Q,AE. Hinc ut □O,AE plus □KI,AB ſeu Q,AE, ad □P,AE, hoc eſt, deſtruendo communem altitudinem AE, ut O+Q ad P, ſic □EIB ad □EAB.

Explicita itaque eſt ratio, quam habet □GIH ad □FAC, quippe oſtenſa eſt eadem quæ ipſius IH ad AC, ſeu O+Q ad P.

Quo-

Quocirca jam ratio explicanda reſtat, quæ eſt inter ▭ E I B & ▭ E A B.

Quoniam autem in hac explicanda ad 4^or dimenſiones aſcenditur, deveniendum erit ad pauciores dimenſiones, ut tota reſolutio duntaxat per rectarum aut planorum conſiderationem abſolvatur.



E I ſeu	E A + A I	E A
	$\frac{ce+ad}{c}$	—— e
23.6	I B	A B
	$\frac{af}{c}$	—— a
▭ E I B ſeu ▭ ſub E A + A I in I B		▭ E A B
	$\frac{ceaf+adaf}{cc}$	—— ea

Vt E I ſeu E A + A I eſt ad E A,

$\frac{ce+ad}{c}$ —— e

Mult. per C A. c c

ſic ▭ E A, C A + ▭ A I, C A eſt ad ▭ C A E.

$ce+ad$ ce

Vel, ſi pro ▭ E A, C A, propter ſimilitudinem △^rum C A B & A M D, ubi C A eſt ad A B,

Porrò quoniam ratio ▭^li E I B ad ▭ E A B compoſita eſt ex ratione E I ſeu E A + A I ad E A, & ex ratione I B ad A B; & quidem E A + A I ad E A, ſi com-

ſicut A M ad MD ſeu E A ſcribatur □ B A M,
ſicut □ B A M + □ C A I. ad □ B A M.

Vel rurſus, ſi pro □ C A I, propter ſimilitudinem △rum B A C & A I G, ſcribatur □ B A, G I, ſicut □ B A M + □ B A, G I ad □ B A M, hoc eſt, ſicut A M + G I, hoc eſt, G L ad A M.

vide ſupra ad notam 1 *

relictâ communi altitudine B A,

communis aſſumatur altitudo C A, ſit ſicut □ CAE, ſeu B A M, + □ C A I ſeu B A, G I ad □ C A E ſeu B A M, hoc eſt, relinquendo communem altitudinem B A, ſicut A M + G I ſeu G L ad A M; at verò I B ad A B, ſicut □ I B, C A ſeu K I, A B ad □ C A B, hoc eſt, deſtruendo communem altitudinem A B, ſicut K I ad C A: Erit quoque ratio □li E I B ad □ E A B, hoc eſt, ipſius O + Q ad P, compoſita ex ratione G L ad A M, & ex ratione K I ad C A.

Vt I B eſt ad A B,

$\frac{af}{c}$ ——— a

Mult. per C A

c c

ita □ I B, C A eſt ad □ C A B.

af ——— ca

Vel, ſi pro □ I B, C A, propter ſimilitudinem △rum C A B & K I B, ſcribatur □ K I, A B, ſic □ K I, A B, ad □ C A B, hoc eſt, relictâ communi altitudine A B, ſicut K I ad C A.

Vide ſupra ad notam 2 *

Conſtat igitur, rationem □li E I B ad □ E A B ſeu ipſius O + Q ad P eſſe compoſitam ex ratione G L ad A M, & ex ratione K I ad C A.

Iam quia ſuperior ratio ipſius O + Q ad P nulli rationi linearum, quæ in Ellipſi ductæ ſunt, reſpondet; neque etiam adhuc luculenter patet, eam, ſi cum ratione G L ad A M, aut K I ad C A confertur, ex his compoſitam eſſe, quemadmodum ex aſſumptis jam fuit deductum; fiat præterea ut

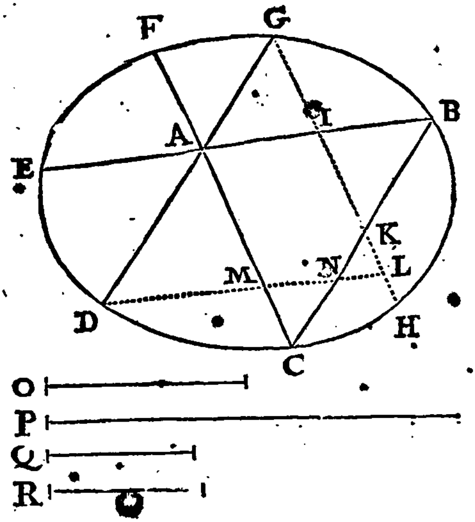
K I ad Q, ſic F A ad R.

f ——— $\frac{af}{e}$ ——— d / $\frac{ad}{e}$. 6*

eritque, per 16.6ti,

□ K I, R ∞ □ Q, F A.

Denique fiat ut K I ad Q, ſic F A ad R: eritque □ K I, R æquale □ Q, F A. Ac proinde cum O + Q ad P,



Vt O + Q eſt ad P,

$\frac{cf}{d} + \frac{af}{e}$ —— $\frac{cc}{d}$

Mult. per FA. d . . . . . d

ad P, aſſumendo communem altitudinem FA, ſit ſicut □O, FA ſeu KI, CA, + □lo Q, FA ſeu KI,

ſic □O, FA ſeu KI, CA, + □Q, FA ſeu KI, R eſt ad □P, FA ſeu □CA.

Vide ſupra ad notam 3* $cf + \frac{daf}{e}$ —— cc

Cur □P, FA ſit ∞ □CA, ita concluditur

3* Eſt namque KI ad FA, ut O ad CA;

f —— d —— $\frac{cf}{d}$ —— c

& convertendo

FA ad KI, CA

d —— f c

ut CA ad O. P

c —— $\frac{cf}{d}$ . . . . . $\frac{cc}{d}$

Vnde ex æquo erit

ut FA ad CA, ita CA ad P.

d —— c —— c —— $\frac{cc}{d}$

Ac proinde, per 17. 6ti, □P, FA ∞ □CA.

Rad □P, FA ſeu □CA: Erit ratio compoſita ex ratione GL ad AM, & ex ratione KI ad CA eadem rationi □li KI, CA + □KI, R ad □CA, hoc eſt, eadem rationi, quæ componitur ex ratione KI ad CA, & ex ratione CA + R ad CA. Ideoque ſi communis auferatur

Vide ſupra ad notam 4*

	KI	CA
	f ————	c
23.6.	CA + R	CA
	$c + \frac{ad}{e}$ ————	c
	□KI,CA + □KI,R	□CA
	$cf + \frac{daf}{e}$ ————	cc

ratio KI ad CA, erit quoque reliqua ratio GL ad AM eadem reliquæ rationi CA + R ad CA hoc eſt, erit GL ad AM, ut CA + R ad CA. Quod verum eſſe deinceps ſic oſtenditur.

Hinc cum ratio □^{li} GIH ad □FAC ſive ipſius IH ad AC eadem ſit oſtenſa quæ ipſius O + Q ad P, & hæc rurſus eadem rationi, quæ componitur ex ratione KI ad CA, & ex ratione CA + R ad CA; at verò ratio □^{li} EIB ad □EAB eadem rationi, quæ componitur ex ratione GL ad AM, & ex ratione KI ad CA: ſequitur, ſi ratio □^{li} GIH ad □FAC (quemadmodùm ſuppoſitum fuit) eadem ſit rationi □^{li} EIB ad □EAB, rationem compoſitam ex KI ad CA, & ex ratione CA + R ad CA debere quoque eandem eſſe rationi, quæ ex GL ad AM, & ex KI ad CA componitur. Ac proinde, ſi utrobique communis auferatur ratio KI ad CA, rationem reliquam CA + R ad CA eandem quoque fore reliquæ rationi GL ad AM.

Hoc autem cum nondum per ſe evidens ſit, ſupereſt ut ipſum ſequenti argumentatione reſolvamus atque penitus manifeſtum reddamus.

Ex ſimilitudine △^{lorum} ABC & MDA eſt
AB AC MD ſeu AE MA ſeu IL
a —— c ———— e / ad $\frac{ce}{a}$. Vnde GL fit ∞ $d + \frac{ce}{a}$.

Ex ſimilitudine △^{lorum} ABC & IAG eſt
BA AC AI IG ſeu AF
a —— c —— $\frac{ad}{c}$ —— d

Ac proinde, per 16.6^{ti}, □BAF ∞ □CAI.
Ex ſimilitudine △^{lorum} GLD & AMD eſt
GL ad AM,
$d + \frac{ce}{a}$ ———— $\frac{ce}{a}$

Quoniam enim, propter ſimilitudinem triangulorum GLD & AMD, eſt ut GL ad AM ita DL, ſeu EI ad

DM

ſicut D L ſeu E I ad D M ſeu E A;

$e + \frac{ad}{c}$ ——— e

mult. per C A. c c

Vel per 1. 2di ſicut ▭ E I, C A ſeu C A E + C A I ſeu AE, R ad ▭ CAE.

$ce + ad$ ——— ce

hoc eſt, relictâ communi altitudine A E ſicut C A + R ad C A.

D M ſeu E A; ut autem E I ad E A, ita, aſſumptâ communi altitudine C A, ▭ E I, C A ſeu C A E plus ▭ C A I ſeu A E, R eſt ad ▭ C A E: Erit ut G L ad A M, ita ▭ C A E + ▭ R, A E ad ▭ C A E, hoc eſt, deſtruendo communem altitudinem A E, ſic C A + R ad C A.

Ex conſtructione eſt

Vide ſupra ad notam 6*

KI Q FA R

f — $\frac{af}{e}$ — dl $\frac{ad}{e}$

itemque AE AB KI Q

Vide ſupra ad notam 5*

e — a — fl $\frac{af}{e}$

Ideoque AE AB FA R

per 11. 5ti. e — a — d — $\frac{ad}{e}$

Ac proinde per 16. 6ti, ▭ B A F ∞ ▭ A E, R.

Hinc cum ▭ B A F etiam ſit ∞ ▭ C A I, erit ſimiliter ▭ A E, R ∞ ▭ C A I.

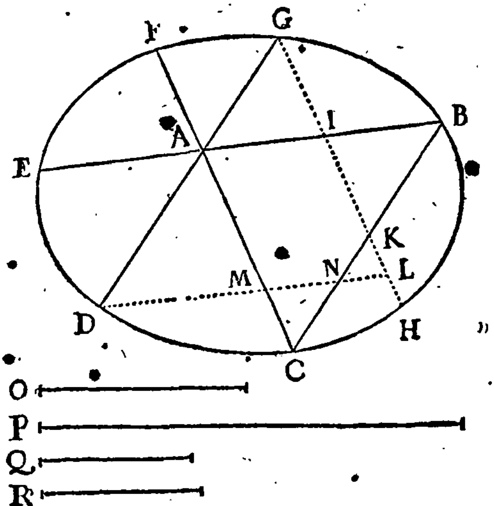
Patet itaque G L eſſe ad A M, ſicut C A + R ad C A. Vt erat propoſitum.

Quare cum hoc pacto, aſſumentes quæſitum tanquam verum, per reſolutionem Geometricam devenerimus ad verum conceſſum: ſequitur, quæſitum illud, quod cum conceſſo iſto omnimodè connectitur, verum eſſe. hoc eſt, umbram baculi C, quæ tranſibat per A, tranſiiſſe ſimiliter per B. Quod erat demonſtrandum.

Et hæc quidem, quæ Reſolutionem Geometricam Theorematis concernunt, quod ad ſolutionem Problematis pag. 372 ut conceſſum ſuppoſitum fuit. Cæterùm quoniam iis, qui cum Logicis ſtatuunt ex falſis etiam poſſe verum concludi, reſolutio hæc ad quæſiti oſtenſionem incerta videri poteſt: placuit majoris certitudinis ergo idem Theorema Syntheticè verificare, procedendo à conceſſis ad quæſita, prout ad hæc me inſtigavit præſtantiſſimus ac

undequaque doctiſſimus juvenis D. Petrus Hartſingius, Iaponenſis, quondam in addiſcendis Mathematis diſcipulus meus ſolertiſſimus.

Demonſtratio autem ipſa filûm calculi ſequitur, qualis extat pag. 370 & 371, *at eodem nonnihil hîc immutato; ut appareat paſſim artificium, quo ſingula Geometricè explicari queant.*



Poſitâ, ut ante, A D ∞ y

erit ut B A ad A E, ita B C ad A D

a — e — b ad y ſeu $\frac{be}{a}$.

ac proinde per 16. 6ti

□ B A, A D, □ B C, A E

ay ∞ be.

Ex natura Ellipſis per 17 Conicorum Apollonii

A D. y KB. $b-z$

A G. z AG vel CK z

eſt □ D A G. yz ad □ CKB. $bz-zz$,

F A. d KH. x

A C. c AC vel KG. c

ut □ F A C. cd ad □ GKH. cx.

Quoniam igitur ex hypotheſi eſt B A ad A E, ſicut B C ad A D: erit □lum ſub extremis B A, A D æquale □lo ſub mediis B C, A E. Deinde quoniam ex natura Ellipſis eſt, ut □ D A G ad □ C K B, ſive, rejectâ communi altitudine A G vel C K, ut D A ad K B, ita □ F A C ad

AG AC

id eſt, rejectis communibus altitudinibus z & c, erit ut D A ad K B, ita F A ad K H

$y — b — z — d$ / ad x.

B A

ſive, aſſumendo communem altitudinem a, ut □BA, AD ſeu □BC, AE ad □BA.KB, ita FA ad KH

a ay vel $be — ab — az — d$ / ad x. δ

Eſto jam K I ∞ f.

eritque propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ B C A & B K I ut B C ad C A, ita B K ad K I

$b — c — b — z$ / ad f ſeu $\frac{cb-cz}{b}$. ac proinde per 16. 6^{ti}.

add. H K. x □BC.KI, □CA,BK.

mult. H I. $f+x$

per I G. h ζ bf ∞ $cb - cz$

Deinde ſit FG ∞ h.

□GIH. $fh+hx$

eritque propt. ſimil. $\triangle^{rum}$ B C A & A G I ut B C ad C A, ita A G ad G I

$b — c — z$ / ad h ſeu $\frac{cz}{b}$. ac proinde per 16. 6^{ti}

□BC,IG □CA,AG

Similiter eſto A I ∞ k. β bh ∞ cz.

eritque propter ſimil. $\triangle^{rum}$ B C A & A G I ut B C ad B A, ita A G ad A I

$b — a — z$ / ad k ſeu $\frac{az}{b}$. ac proinde per 16. 6^{ti}.

add. A E. e □BC,AI □BA,AG

mult. E I. $k+e$ ε bk ∞ az.

per I B. l

□EIB. $kl+el$

Sit item I B ∞ l.

eritque propter ſimil. $\triangle^{rum}$ B C A & B K I

ad □ G K H, id eſt, relictâ communi altitudine A C vel G K, ita F A ad K H; & quidem D A ad K B, ſi B A pro communi altitudine ſumâtur, ſit ſicut □BA, AD ſeu α B C, A E ad □B A, K B: erit ut □B C, A E ad □ B A, K B, ita F A ad K H.

Porrò cum ex ſimilitudine $\triangle^{rum}$ B C A & B K I, B C ſit ad C A, ſicut B K ad K I: erit □ ſub B C, K I æquale □lo ſub C A, B K. Eâdem ratione cum B C ſit ad B A, ſicut B K ad B I: erit □ ſub B C, B I æquale □lo ſub B A, B K.

Haud ſecus cum ſimilia ſint $\triangle^{la}$ B C A & A G I, ac idcirco B C ad C A, ſicut A G ad G I: erit □ ſub B C, G I æquale □lo ſub C A, A G. Similiter cum B C ſit ad

ut

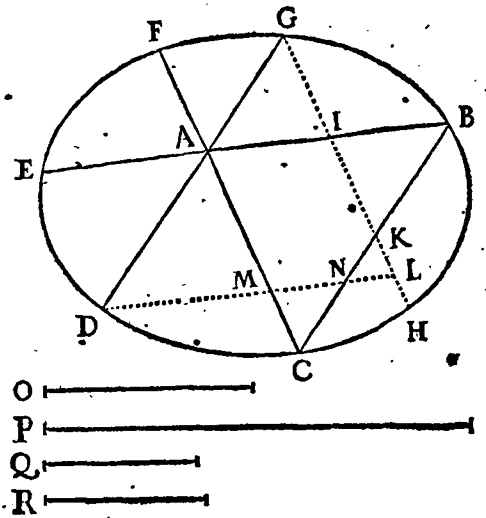
ut B C ad B A, ita B K ad B I

b——a——b—z ad *l* ſeu $\frac{ab - - az}{b}$. ac proinde per 1[illegible]. 6[ti]

□ B C, B I □ B A, B K

γ *bl* ∞ *ab—az*.

B A, ſicut A G ad A I: erit pariter □ ſub B C, A I æquale □[lo] ſub A B, A G.



Ex natura Ellipſis per 17. 3[tii] Conic. Apollonii

eſt □ F A C ad □ G I H, ut □ E A B ad □ E I B

cd —— bf + bx —— ae/ ad *k*[illegible] *+ el.*

Eſt autem per 23. 6[ti] ratio □[li] F A C ad □ G I H

cd——bf + bx

compoſita ex ratione F A ad I H ſeu I K + K H, &

d ————— f + x

ex ratione C A ad G I, id eſt, aſſumendo commu-

c——h

B C

nem altitudinem *b*, ex ratione □[li]

β

B C, C A ad □ B C, G I vel □ C A, A G, ſive, reje-

bc ———— bh ſeu *cz*

C A

ctâ communi altitudine *c*, ex ratione B C ad A G.

b——z.

Iam verò, quia ex natura Ellipſis □ F A C eſt ad □ G I H, ut □ E A B ad □ E I B; & quidem ratio □[li] F A C ad □ G I H compoſita ſit ex ratione F A ad I H ſeu I K + K H, & ex ratione C A ad G I, id eſt, aſſumendo communem altitudinem B C, ex ratione □[li] B C, C A ad □ B C, G I vel *β* □ C A, A G, ſive etiam, re-

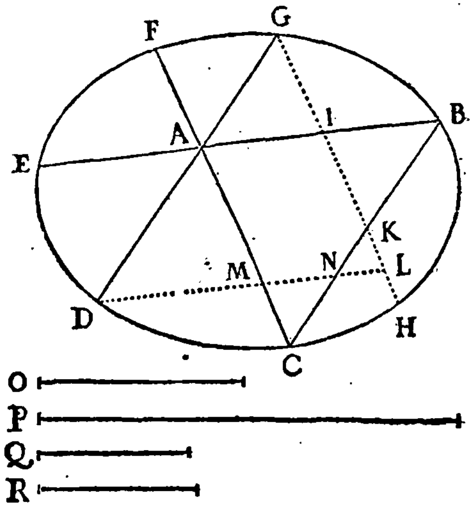
Simi-

Similiter ratio □li E A B ad □ E I B compoſita eſt
ae —— kl + el
ex ratione E A ad I B, & ex ratione A B ad E I.
e —— l   *a — k + e.*
Quarum quidem E A ad I B, ſi B C pro communi
e —— l   *b*
altitudine ſumatur, eadem eſt quæ □li
γ
B C, E A ad □ B C, I B ſeu □ B A, B K, hoc eſt, ea-
be —— bl vel *ab — az*
dem quæ δ F A ad K H.
d —— x

Sed A B ad E I, ſi B C ſimiliter pro communi altitu-
a — k + e   *b*
dine ſumatur, eadem, quæ □li A B, B C ad □ B C, E I
ab —— bk + be
ε   α
vel □ B C, A I, id eſt, B A, A G, + □ B C, E A vel □ B A,
ſive   *az + ay,*
A D, hoc eſt, relictâ communi altitudine A B, ſeu *a*,
eadem quæ B C ad A G + A D.
b —— z + y.

Erit igitur ratio compoſita ex ratione
F A ad I K + K H, & ex ratione B C ad A G, id eſt,
d —— f + x   *b —— z*
per 23. 6ti, ratio □li F A, B C ad □ I K, A G + □ K H, A G,
bd —— fz + xz
eadem rationi quæ componitur ex ratione F A ad K H,
d —— x
& ex ratione B C ad A G + A D, id eſt, per 23. 6ti,
b —— z + y
eadem rationi, quam habet
□ F A, B C ad □ K H, A G + □ K H, A D.
bd —— xz + xy.

jectâ communi altitudine C A, ex ratione B C ad A G; At ratio □li E A B ad □ E I B compoſita ex ratione E A ad I B, & ex ratione A B ad E I; quarum quidem E A ad I B, ſi B C pro communi altitudine ſumatur, eſt ſicut □ B C, E A ad □ B C, I B ſeu γ □ B A, B K, quæ eadem oſtenſa eſt δ rationi F A ad K H; ſed A B ad E I, ſi B C ſimiliter pro communi altitudine ſumatur, ut □ A B, B C, ad □ B C, E I, id eſt, ad □ B C, A I vel ε B A, A G, + □ B C, E A vel α □ B A, A D; ſive etiam, relictâ communi altitudine A B, ut B C ad A G + A D: Erit ratio compoſita ex ratione F A ad I K + K H, & ex ratione B C ad A G, id eſt, per 23. 6ti, ratio □li F A, B C ad □ I K, A G + □ K H, A G, eadem rationi, quæ componitur ex F A ad K H, & ex ratione B C ad A G + A D. id eſt, per 23. 6ti, eadem rationi, quam habet □ F A, B C ad □ K H, A G + □ K H, A D.



Hinc cum
□FA,BC, ſit ad □IK,AG+□KH,AG, ſicut idem □FA,BC ad
bd ——— *fz+xz* ——— *bd* /
□KH, AG+□KH, AD: erit, per 9. 5ti,
ad *xz+xy*:
□IK,AG+□KH,AG æq. □KH,AG+□KH,AD.
fz+xz ∞ *xz+xy*.

Vnde, dempto utrinque communi □lo KH, AG,
xz

erit quoque reliq. □IK, AG æquale reliquo □lo
fz

KH, AD
xy.

Ac proinde, per 16. 6ti,
ut IK ad KH, ita DA ad AG.
f —— *x* —— *y* / ad *z*.

Hinc cum □ FA,BC ad □IK,AG+□KH,AG eandem habeat rationem, quam idem □FA,BC ad □KH,AG +□KH,AD: erit □IK,AG +□KH,AG æquale □lo KH, AG+□lo KH, AD. A quibus ſi commune auferatur □KH, AG, erit quoque reliquum □IK,AG æquale reliquo □lo KH,AD. Vnde erit ut IK ad KH, ita DA ad AG.

Sed

BC
Sed ut IK ad KH, ita eſt, aſſ. comm. altit. *b*,
f —— *x*
ζ
▭IK,BC vel ▭CA,BK ad ▭KH,BC.
bf *cb*—*cz* —— *bx*.

AB
At DA ad AG, ita aſſ. comm. alt. *a*, eſt ▭DA,AB
y —— *z* *ay*
α
vel ▭BC,AE ad ▭AG,AB.
be —— *az*.

Quare erit ut
▭CA,BK ad ▭KH,BC, ita ▭BC,AE ad ▭AG,AB.
cb—*cz* —— *bx* —— *be* / ad *az*.

δ BC
Cum autem ſupra ſit FA ad KH, i. e., aſſ. comm. alt. *b*,
d —— *x*
▭FA,BC ad ▭KH,BC, ſicut ▭AE,BC ad ▭KB,BA,
bd —— *bx* —— *be* / ad *ab*—*az*,
hoc eſt, convertendo
▭KH,BC ad ▭FA,BC, ſicut ▭KB,BA ad ▭AE,BC:
bx —— *bd* —— *ab*—*az* / ad *be*:
Erunt ▭CA,BK ▭KH,BC ▭FA,BC tres magnitudines ab una parte,
cb—*cz*——*bx*....... *bd*
& ▭KB,BA ▭AE,BC ▭AG,AB tres aliæ ab altera parte, quæ binæ ſumptæ in eadem ſunt ratione, quarumque proportio eſt perturbata:
ab—*az*..... *be*——*az*

Sed ut IK ad KH, ita eſt, aſſumptâ communi altitudine BC, ▭IK, BC vel ζ ▭CA, BK ad ▭KH, BC. At ſicut DA ad AG, ita, aſſumptâ communi altitudine AB, ▭DA, AB vel α ▭BC, AE ad ▭AG, AB. Quare erit ut ▭CA, BK ad ▭KH, BC, ita ▭BC, AE ad ▭AG, AB. Cum autem ſupra ſit δ, ut FA ad KH, ſive, aſſumptâ communi altitudine BC, ▭FA, BC ad ▭KH, BC, ita ▭AE, BC ad ▭KB, BA; id eſt, convertendo, ▭KH, BC ad ▭FA, BC, ſicut ▭KB, BA ad ▭AE, BC: erunt ▭CA, BK, ▭KH, BC, & ▭FA, BC 3 magnitudines ab una parte, & ▭KB BA, ▭AE, BC, & ▭AG, AB tres aliæ ab altera parte, quæ binæ ſumptæ in eadem ſunt ratione, quarumque proportio eſt perturbata.

 Quare

Quare etiam per 23. 5^{ti} ex æqualitate proportionales erunt

id eſt, ▭ C A, B K ad ▭ F A, B C, ſicut ▭ K B, B A

c b — c z ——— b d ——— a b — a z

B A

ad ▭ A G, B A, ſeu, rej. com. alt. *a*, ut K B ad A G.

——— *a z* . . . . *b — z ——— z*.

Id quod convenit cum æquatione inventa pag. 371, multiplicando ſc. tum extremos tum medios terminos, oſtendens nos in eodem calculo Geometricè explicando eò perveniſſe, ubi c b z — c z z æquatur b b d — b d z.

Denique ut inveniatur A G ſeu *z*, quoniam ſumendo C A ſeu *c* pro communi altitudine,

K B eſt ad A G, ſicut ▭ C A, K B ad ▭ C A, A G:

b — z ——— z ——— c b — c z / ad *c z*:

erit ut

▭ C A, B K ad ▭ F A, B C, ita ▭ C A, K B ad ▭ C A, A G.

c b — c z ——— b d ——— c b — c z / ad *c z*.

Hinc cum ▭ C A, B K ad ▭ F A, B C & ad ▭ C A, A G

c b — c z *b d* *c z*

eandem habeat rationem, erit per 9. 5^{ti},

▭ F A, B C. æq. ▭^{lo} C A, A G.

b d ∞ *c z*.

Vnde per 16. 6^{ti} erit,

ut C A ad A F, ita B C ad A G.

c ——— d ——— b / ad *z*.

Quod erat propoſitum.

Vnde & ipſæ ex æqualitate proportionales erunt, nimirum, erit ut ▭ C A, B K ad ▭ F A, B C, ita ▭ K B, B A ad ▭ A G, B A, id eſt, relictâ communi altitudine B A, ita K B ad A G. Denique, quoniam, aſſumptâ communi altitudine C A, K B eſt ad A G, ſicut ▭ C A, K B ad ▭ C A, A G: erit ut ▭ C A, B K ad ▭ F A, B C, ita ▭ C A, K B ad ▭ C A, A G. Quocirca cum ▭ C A, B K ad ▭ F A, B C & ad ▭ C A, A G eandem habeat rationem, erit ▭ F A, B C æquale ▭^{lo} C A, A G; ac proinde C A ad A F, ſicut B C ad A G. Quod erat demonſtrandum.

F I N I S.

RENATI

DES-CARTES

GEOMETRIÆ

PARS SECVNDA.

Cujus contenta ſequens pagina exhibebit.

CATALOGVS

eorum,

Quæ in hâc ſecundâ parte continentur.

FRANCISCI à SCHOOTEN Principia Matheſeos Vniverſalis, ſeu Introductio ad CARTESIANÆ GEOMETRIÆ Methodum. Conſcripta ab ERASMIO BARTHOLINO.

FLORIMONDI DE BEAVNE duo tractatus poſthumi. Alter de Natura & Conſtitutione, alter de Limitibus Æquationum.

IOHANNIS DE WITT de Elementis Curvarum linearum libri duo.

FRANCISCI à SCHOOTEN Tractatus de concinnandis Demonſtrationibus Geometricis ex Calculo Algebraïco.

LECTORI BENEVOLO

I. HUDDE S. P.

IN Galliis eram cum epiſtolæ meæ imprimerentur, ideoque domum redux, onus in me ſuſcepi omnia de integro revidendi & ad calculum revocandi, ut probe mihi conſtaret, num quædam nimis obſcúrè expreſſa eſſent, vel etiam errata irrepſiſſent; Quæcunque inveni, illa ſunt quæ ſequuntur.

Ad clariorem ſenſum.

p.424 l. 15. *Excepto* &c. Cum $x - a \infty 0$, multiplicatur per $b - c$, reſultat $bx - cx - ab + ac \infty 0$, ſeu $x \infty \frac{ab - ac}{b - c}$; ſi pónas jam $b - c \infty 0$, non ſequitur valorem x per hanc æquationem non poſſe inveniri, quandoquidem Nominator $ab - ac$ per $b - c$, dividi poteſt, ſed tum ſequitur cum Nominator per Denominatorem non dividi poteſt, vel cum ambo per eandem quantitatem indiviſibiles ſunt: Notandum ergo eſt Denominatorem hic conſiderari ſine relatione ad Nominatorem, veluti patet ex ſequentibus, 1°. *Obſervandum venit num ejuſmodi quantitates in æquatione reperiantur* &c. 2°. *ſi reperiantur, num utramque æquationem dividant.* Sed hæc omnia fortaſſis clarius ſic intelligentur. Excepto tantum ſi æquationis primus terminus non affectus quantitate cognita ſit ab una parte, reliqui, qui ab altera ſunt, faciant fractionem, cujus Denominator, vel Denominatoris diviſor aliquis, Nominatorem dividat, quod ſi contingat, videndum eſt, priuſquam concludatur non dari duarum æquationum communem aliquem diviſorem, num etiam altera æquatio per hunc Denominatorem, vel Denominatoris diviſorem aliquem, diviſibilis ſit. p. 459. l. 10. vel ſic lege, æquatio illa ſemper indiviſibilis erit per x, x^3, x^5, &c., 8, vel per xx, x^4, x^6, &c., — quantitate quavis cognita atque rationali. p. 462, l. 29. pro *omnes quantitates* pone omnia membra. p.492, l.13. pro *Regula*, ſcribe Methodo. p.451 & 456, l.1. lege, nullus terminus eſt $\infty 0$. p. 500, in medio, pro *Quoniam tunc* $\sqrt{C.}$ *ex* $\overline{\tfrac{1}{2} r + \sqrt{\tfrac{1}{4} rr - \tfrac{1}{27} q^3}}$ *extrahi poterit*; ſcribe, extrahendo $\sqrt{C.}$ ex $\overline{\tfrac{1}{2} r + \sqrt{\tfrac{1}{4} rr - \tfrac{1}{27} q^3}}$. & pro, *ſed cum* $\sqrt{C}$ *&c.*, uſque ad, *liceat &c.*; pone, ſed cum $\sqrt{C.}$ ex binomio numerali ope Regulæ p.389, vel perfecte extrahi queat, vel vulgari modo præterpropter, quod ſufficit, poterit etiam ejuſdem beneficio radix ex æquatione Propoſita ſive numerali, ſive literali ſit, inveniri, cum pro literis numeros, vel 0, ad arbitrium aſſumere liceat. p. 502, l.31. & p. 505, l. 17. *reduci* hic ſumitur pro redigi ad duas alias, ex quarum multiplicatione Propoſita æquatio produci poteſt. Errata, quæ irrepſerunt, inveniuntur inter errata primæ partis.

Nec tacere fas eſt me, non ſine admiratione, in Epiſtolis meis, quæ tam ſedulam typothetarum operam requirebant, tam paucos errores oſtendiſſe, niſi cogitarem D. Elzevirios & Clariſſimum Schotenium totis viribus huic operæ incubuiſſe, quapropter nullus dubito quin reliquum totum opus accuratius impreſſum ſit, quam quis fortaſſis exſpectaſſet.

C A R M E N

IN LAUDEM

FR. à SCHOOTEN,

Mathematicorum ocelli.

SCotenI cum ſcripta legis, ſe promit ubique
Ingenii mira dexteritate vigor.
Cum vitam ac mores ſpectas, ſe præbet ubique
Spectandam integritas, ac ſine fraude manus.
Sic quæ perrarò concurrunt corpore in uno,
Hic jungi ingenium cum probitate vides.
Adde quod, ingenium cum ſit ſuperabile paucis,
Vix tamen invenies in probitate parem.

ΠΕΡΙ
ΦΡΑΓΚΙΣΚΟΥ ΣΚΩΤΗΝΟΥ,

τοῦ μακαρίτου,

Διάλογος Μαθήσεως, Εὐσεβείας, καὶ Ὁδοιπόρου.

Μαθ. ΤΙ΄ κλαίεις; σφετέρου τί νέον φρένας ἵκετο πένθος;
(Ἐξαύδα, καὶ μὴ κεῦθε νόῳ, Εὐσεβίη)
Ἠδ' ἐσθῆτα μέλαιναν ἐ[illegible] ἅμα τι τούτῳ
Ἤματα καὶ πάσας νύκτας ἐφεζομένη;
Εὐσ. Θυμήρης μοι υἱὸς ἀπώλετο, φέρτατος ἀνδρῶν,
Ὃς Σοφίην θείην μίξε ταπεινοσύνην.
Τὸν Βαταβῶν Λουγδουνον ἐγείνατο, τόν τε μαθητὴν
Δῶκέ σοι ἐξ ἁπαλοῦ ἀγχίνοον βρέφεος.
Μ. Σκώτηνος; Ε. κεῖνος. Μ. Σκώτηνος; λείψανον ἀνδρῶν
Χρυσείου γένεος, λείψανον ἡμιθέων;
Σκώτηνος, τοῦ ἐμοῖσιν ἴσον φαέεσσι φίλησα,
Ἠδέ μ' ὑπὲρ πασῶν ἀντεφίλησε θεῶν·
Ὅς πόρον εὗρ' ἀπόρων, αἰεὶ φώτισε σκοτεινὸν
Συμμύστης, ζοφερῷ κεῖται ἐνὶ σκότει;
Εὐσ. Εἰνὶ σκότῳ κεῖται, πᾶσιν μερόπεσσι φαεινός,
Οὗτε καὶ Εὐσεβίην, καί σε, φίλη, ἐφίλουν.
Μαθ. Οὐκ ἀλόγως ἀκρίτως τε, θεά, κατὰ δάκρυα λείβεις,
Καὶ στέρνον πλήττεις αἰὲν ὀδυρομένη.
Δὸς τόπον, οὐχ ὅπως (τὸ πάλαι τάχα πειρησαίμην
Ὅττ' ἐστὶν πάντων πολὺ μάκαρ μακάρων)
Γαῖαν κινήσαιμι, ἀκίνητόν περ ἐοῦσαν,
Αὐτὰρ ὅπως, ποσὶν σεῖο προσισαμένη,
Αὐτὴ ἀκίνητος μίμνω, νεαρῆς τε λυπηρὸν
Μνῆμα πέλω Νιόβης πᾶσιν ἐφημερίοις·
Ὁδοιπ. Ὦ θεαί, οὐκ ἔστιν δακρύων ἅλις; οὔποτε νεκρὸς
Δάκρυσι καὶ στοναχαῖς εἰς φάος αὖθις ἔβη.
Ἀλλ' ἴτε, κ' εὐόδμοισι ῥόδοις καταπάσσατε γαῖαν,
Λείρια μιξάμεναι καὶ κυαναυγὲς ἴον·
Εὔξασθ', ὥσπερ ἦν μερόπων βαρὺς οὐδενὶ ζωὸς,
Οὕτω καὶ κούφη γαῖα νεκρῷ τελέθῃ.

Μ. ΣΛΑΔΟΣ,
ἰατρὸς Ἀμστελ.

Celeberrimi de Centro Oſcillationis proble-matis ſolutio.

Viro Sapientiſſimo ſalutem dat

STEPHANVS GILLET,

Nulla in re tam irrito conatu laborarunt Viri Clariſſimi, quam in centro oſcillationis inveſtigando; licet enim quadraginta abhinc annis mathematicus celebris nuſquam gentium extiterit ullus, qui huic indagationi accuratiſſime haud incubuerit, quin etiam plurimi Εὕρηκα *audacter exclamarint; nullos tamen in errores incidit nullus. Næ ego aliena infelicitate minime exterritus, viam adeo expeditam inveni, ut ad ſcopum optatum recte pervenerim. Quo circa arbitror tibi rebus mathematicis gaudenti non ingratum fore, ſi hoc arcanum tantopere inveſtigatum exhibuero.*

Centri oſcillationis demonſtratio.

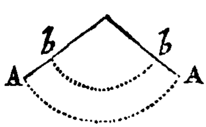
I. *Definitio.*

OScillatio eſt ipſa agitatio penduli ſua gravitate circa axem horizonti parallelum moti. V. G. Si pendulum, A, ſuam agitationem vi gravitatis incipiat in puncto μ. inhibeatque in puncto ν. ipſa agitatio hujus penduli totum arcum $\mu\,\nu$. percurrentis vocatur oſcillatio.



II. *Definitio.*

Quorum pendulorum centra gravitatis arcus ſimiles percurrunt, eadem ſuas oſcillationes, ſimiles faciunt, ſicut pendula A & *b*.



III. *Definitio.*

Centrum oſcillationis eſt punctum, quod in pendulo compoſito agitato perinde movetur, ac ſi nullo modo ſtipatum foret: ac proinde ſi in

ſi in extremo penduli ſimplicis reſideret, oſcillationes ſuas eodem tempore conficeret, atque pendulum compoſitum datum. Itaque tota difficultas huc recidit, ut inveniatur longitudo penduli ſimplicis, quod ſuas oſcillationes ſimiles eodem tempore conficiat, atque pendulum compoſitum datum: nam longitudo hujus penduli ſimplicis eadem eſt, atque diſtantia centri oſcillationis penduli compoſiti ab axe. Qua in inveſtigatione ut mens dirigatur, aliquid de gravitate, ſpatioque decurſo præmittendum eſt.

I. *Lemma.*

Gravia gravitatem habent a levioribus, quæ tantumdem aſcendunt, quantum graviora deſcendunt.

I. *Coroll.*

Hinc colliges mobili ſecundum horizontem moto gravitatem acquiri nullam: Quia nulla leviora aſcendunt.

II. *Coroll.*

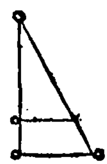
Hinc animadvertis mobili circa centrum moto gravitatem acquiri nullam: ideo quod mobile haud magis deprimitur, quam extollitur.

III. *Coroll.*

Hinc vides gravitatem acquiri per ſolam deſcenſionem centri: quippe qui alii motus pro nihilo habeantur; ac proinde incidentiam gravis ſemper eſſe ſpectandam ex altitudine deſcenſionis centri.

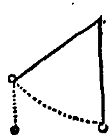
IV. *Coroll.*

Hinc perſpicis duorum gravium ex eadem altitudine cadentium, quorum unum perpendiculariter, alterum vero oblique decidit; utriuſque velocitatem eandem eſſe in horizonte, ſive in plano horizonti parallelo: propterea quod gravitas per motum vel circa centrum, vel horizonti parallelum, neque intenditur, neque remittitur.



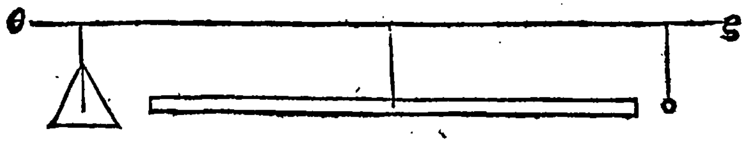
V. *Coroll.*

Hinc manifeſtum eſt velocitatem gravis penſilis, ſive penduli eandem eſſe, atque gravis ex eadem altitudine perp. decidentis: penſile enim nihil aliud eſt, quam grave oblique decidens.



VI. *Coroll.*

Hinc clarum eſt eandem eſſe velocitatem in omnibus pendulis quorum centra gravitatis æque diſtant ab axibus, quandoquidem æqualiter deſcendunt.



VII. *Coroll.*

Hinc liquet eandem eſſe velocitatem ejuſdem plani tum in planum, tum in latus moti: utpote quod centrum utroque modo æque deprimatur.

II. *Lemma.*

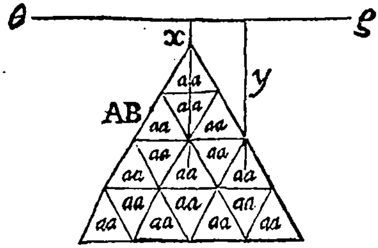
Duobus gravibus ex eadem altitudine cadentibus, quorum unum perp. alterum vero oblique ſecundum rectam lineam decidit; Tempora utriusque incidentiæ ſunt inter ſe ſicut utraque linea ſecundum quas incidunt; quandoquidem eadem eſt velocitas in utroque mobili æqualiter deſcendente.

Coroll.

Hinc ſequitur ut duobus gravibus ex eadem altitudine ſecundum ſingulas lineas rectas oblique cadentibus; Tempora utriuſque incidentiæ inter ſe referantur, ſicut utraque linea obliqua, vel ſicut ſpatia decurſa, ſi gravia ſint æqu[illegible]

III. *Lemma.*

Si planum indefinite dividatur in partes aliquotas. Summa productorum ſingularum partium per ſuam ab axe diſtantiam multiplicatarum, æqualis eſt producto totius plani per ſui centri ab eodem axe diſtantiam multiplicati.



Sit planum (AB) indefinite diviſum in partes aliquotas (*aa*), ex quibus ſingulis dimittantur ſingulæ lineæ inter ſe parallelæ, eæque ad axem θϱ extra poſitum perpendiculares, quæ vocentur *y*: linea e plani centro ad eundem

axem perp. ducta appelletur x: dico ſummam omnium productorum, aay, eſſe æqualem producto abx.

Namque plani ita diviſi ſingulæ partes perinde ſpectari poſſunt, ac ſi forent ſingula pondera: at ex geoſtatica ſumma productorum ſingulorum ponderum per ſuam ab axe diſtantiam multiplicatorum, æqualis eſt producto omnium ponderum per centri communis ab eodem axe diſtantiam multiplicatorum; Ergo &c.

I. *Coroll.*

Hinc perſpicuum eſt ſumſnam productorum ſingularum partium ejuſdem plani multiplicatarum per ſingulas peripherias, quarum ſemidiametri ſunt ipſæ perpend. ad axem, eſſe æqualem producto totius plani multiplicati per peripheriam, cujus ſemidiameter eſt ipſa diſtantia centri ab axe.

II. *Coroll.*

Hinc patet ſpatium a plano in planum circa axem extra poſitum moto decurſum, æquari producto ipſius plani multiplicati per peripheriam, cujus ſemidiameter eſt diſtantia centri ipſius plani ab axe.

III. *Coroll.*

Hinc ultro emergit inveſtigatio omnium ſolidorum a planis circa axes motis deſcriptorum; ſed iſtæc alibi.

IV. *Coroll.*

Hinc deduces ſpatium a plano in planum circa axem extra poſitum moto decurſum, æquari alteri ſpatio, quod percurreretur ſi ſingula puncta, vel ſingulæ partes aliquotæ plani tantumdem ab axe diſtarent, quantum ipſius centrum gravitatis.

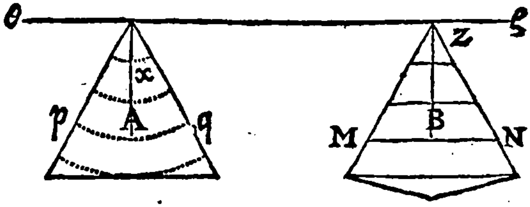
V. *Coroll.*

Hinc apparet ſpatia a planis æqualibus decurſa, eſſe in eadem ratione, atque eorumdem planorum diſtantias centrorum gravitatis ab axe.

VI. *Coroll.*

Hinc nullo negotio reperias ſpatium a plano in latus moto decurſum:

Si enim planum A indefinite dividatur per ſuperficies cylindraceas parallelas, quarum omnium ſit idem axis $\theta\,\varrho$: conficiatur planum, b, cujus ſingulæ lineæ axi parallelæ æquentur ſingulis ſectionibus cylindraceis, quæ tantumdem ab axe diſtant, V. G. linea recta M N. æquetur ſectioni. $p\,q$. ſicque de cæteris; ex hujus plani b centro linea ad axem $\theta\,\varrho$ perp. ducta vocetur Z: ex plani A centro linea perpend. ducta ad eundem axem appelletur, x. Spatium a plano A in planum eſt ad ſpatium ab eodem plano in latus moto decurſum, ſicut $x.\ z.$ nam ſpatium a plano A in latus moto decurſum, æquatur ſpatio per planum b in planum motum decurſo.

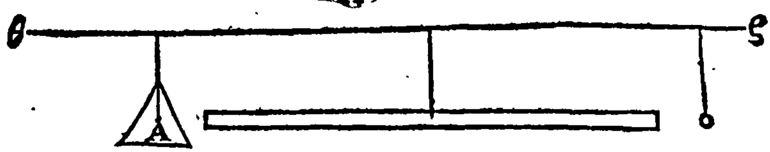


Iam vero centrum oſcillationis colluſtretur.

I. *Problem.*

Invenire centrum oſcillationis plani in planum circa axem extra poſitum moti.

Centrum oſcillationis idem eſt, atque centrum gravitatis ipſius plani.



Cum enim, ex 6° corollario primi lemmatis, & ex 4° coroll. 3[tii] lemmatis, planum A eadem velocitate, idem ſpatium percurrat, quod percurreret ſi ipſius omnia puncta tantumdem ab axe diſtarent, quantum centrum gravitatis; neceſſe eſt ut oſcillationes ſuas eodem tempore perficiat, atque perficeret ſi ſingula puncta tantumdem ab axe diſtarent: atqui ſi ſingula puncta tantumdem ab axe diſtarent, oſcillationes ſuas eodem tempore conficeret, atque pendulum ſimplex, cujus longitudo eſt ipſa diſtantia centri gravitatis ab axe, Ergo &c.

I. *Coroll.*

Hinc noveris omnium planorum, quorum centra gravitatis ab axe æque diſtant, idem eſſe centrum oſcillationis in planum.

II. *Coroll.*

Hinc intelligis cujuſlibet lineæ in planum circa axem extra poſitum motæ, centrum oſcillationis idem eſſe, atque centrum gravitatis; Quandoquidem quælibet linea ſpectari poteſt, ſicut planum minimæ latitudinis.

II. *Probl.*

Invenire durationem oſcillationis plani in latus circa axem extra poſitum moti.

Tempora oſcillationum plani tum in planum, tum in latus moti, ſunt inter ſe, ſicut ſpatia utroque motu decurſa; propterea quod utriuſque oſcillationis tempora perinde ſpectanda ſunt, atque tempora incidentiarum duorum gravium æqualium ex eadem altitudine oblique decidentium.

III. *Probl.*

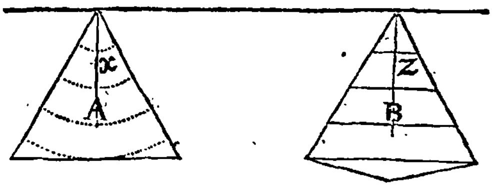
Invenire centrum oſcillationis plani in latus circa axem extra poſitum moti.

Si centri plani ab axe diſtantia vocetur x. tempusque oſcillationis in planum, ſit ad tempus oſcillationis in latus, ſicut $x. z$: hujus relationis $x^2. z^2 : x. \frac{z^2}{x}$, ultimus terminus deſignabit diſtantiam centri oſcillationis ab axe, ſive longitudinem penduli ſimplicis, quod ſuas oſcillationes ſimiles eodem tempore conficit, atque pendulum in latus motum; propterea quod longitudines pendulorum ſimplicium ſunt inter ſe, ſicut quadrata temporum oſcillationum.

IV. *Probl.*

Invenire durationem oſcillationis ſolidi.

Si ſolidum A, indefinite dividatur per ſuperficies cylindraceas parallelas, quarum omnium idem ſit axis, atque oſcillationis; compona-



ponatur planum b, cujus ſingulæ lineæ axi parallelæ, ſint inter ſe, ſicut ſingulæ ſectiones cylindraceæ, quæ tantumdem ab axe diſtant. Diſtantia centri hujus plani ab axe vocetur z. diſtantiaque centri ſolidi ab eodem axe appelletur x. Tempus oſcillationis ſolidi, eſt ad tempus oſcillationis penduli ſimplicis, cujus longitudo ſit x. ſicut z. x. quandoquidem ſolidum ſpectari debet ſicut planum in latus motum.

V. *Probl.*

Invenire centrum oſcillationis ſolidi.

Hoc problema perinde ſolvitur, atque 3. prob. ſupra.

VI. *Probl.*

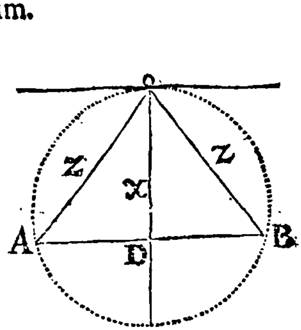
Invenire centrum oſcillationis peripheriæ in latus circa tangentem motæ.

Diſtantia centri oſcillationis ab axe, ſive longitudo penduli ſimplicis oſcillationes ſuas eodem tempore conficientis, refertur ad radium, ſicut quadratoquadratum diametri ad productum circuli per ſe ipſum multiplicati; Quandoquidem ſpatium oſcillatione in planum eſt ad ſpatium oſcillatione in latus decurſum, ſicut circulus ad quadratum diametri, ut ex infinitorum geometria demonſtratur.

VII. *Probl.*

Componere pendulum quod oſcillationes ſuas eodem tempore conficiat, atque pendulum ſimplex datum.

Longitudo penduli ſimplicis dati ſit diameter peripheriæ, quam axis tangit in puncto O. ſi hac in peripheria bina puncta A & B a puncto ſuſpenſionis æque diſtantia ad libitum ſumantur; hæc duo puncta component pendulum, quod ſuas oſcillationes in latus eodem tempore conficiet, atque pendulum ſimplex. ad quod probandum.



Hæc duo puncta linea diametrum perp. ſecante in puncto D. jungantur, ſectio diametri D O, vocatur x. linea A O ſive B O appelletur z.

Ex ſupra dictis tempus oſcillationis in planum, eſt ad tempus oſcillationis in latus ſicut $x.z$, ac proinde hujus relationis $x^2.z^2 : x. \frac{z^2}{x}$. ultimus terminus ſive diameter deſignabit longitudinem penduli ſimplicis, quod oſcillationes ſuas eodem tempore conficit, atque pendulum ex iſtis binis punctis compoſitum, in latus motum.

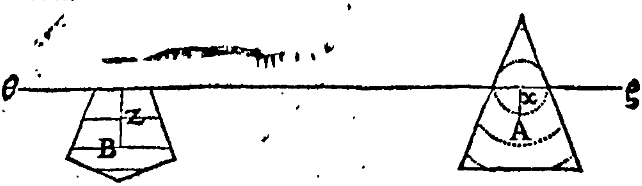
Coroll.

Hinc tibi confeſtim occurrunt infinita pendula compoſita, quæ ſuas quodque oſcillationes eodem tempore conficiunt: verum haud ſcio an obſtupeſcas quod peripheria ſuas oſcillationes breviore tempore perficiat, quam pendulum ſimplex, cujus longitudo eſt ipſa diameter, cum peripheria integra reſolvi poſſit in pendula ſimpliciora componentia, quorum ſingula ſuam quodque oſcillationem eodem tempore ſeorſim conficiant; mirari tamen deſines ſi perſpexeris majorem eſſe gravitatem in peripheria conglutinata, quam in omnibus ipſius partibus disjunctim motis.

VIII. *Probl.*

Invenire durationem oſcillationis cujuſlibet penduli circa axem intra poſitum moti.

Si pendulum A, cujus diſtantia ab axe vocetur x. indefinite dividatur per ſuperficies cylindraceas parallelas, quarum omnium idem ſit axis; atque oſcillationis: componatur planum B, cujus ſingulæ lineæ axi parallelæ ſint inter ſe, ſicut ſingulæ ſectiones cylindraceæ, quæ tantumdem ab axe diſtant: diſtantiaque centri plani B ab axe appelletur z: Tempus oſcillationis penduli A, erit ad tempus oſcillationis penduli ſimplicis, cujus longitudo ſit x, ſicut $z.x$.



FINIS.

00049934

Digitized with financial assistance from the
Government of Maharashtra
on 25 June, 2016